Алгоритмы и алгоритмические языки

Лекция 24

7 декабря 2019 г.

Пирамидальная сортировка: пирамида (двоичная куча)

- Рассматриваем массив **`a`** как двоичное дерево:
  - Элемент **`a[i]`** является узлом дерева
  - Элемент **`a[i/2]`** является родителем узла **`a[i]`**
  - Элементы **`a[2*i]`** и **`a[2*i+1]`** являются детьми узла **`a[i]`**

- Для всех элементов пирамиды выполняется соотношение (основное свойство кучи):

  `a[i] >= a[2*i]` и **`a[i] >= a[2*i+1]`**

  или

  `a[i/2] <= a[i]`
  - Сравнение может быть как в большую, так и в меньшую сторону

- **Замечание**. Определение предполагает нумерацию элементов массива от 1 до n
  - Для нумерации от 0 до n-1:

  `a[i] >= a[2*i+1]` и **`a[i] >= a[2*i+2]`**

Пирамидальная сортировка: пирамида (двоичная куча)

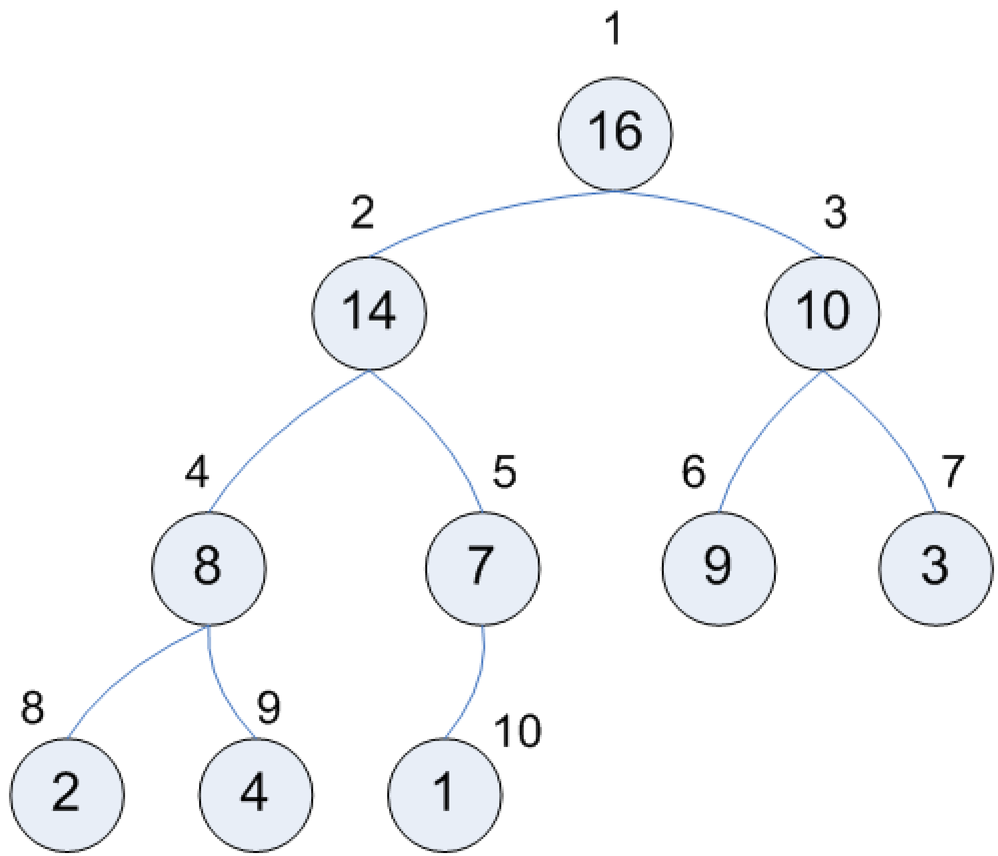
- Для всех элементов пирамиды выполняется соотношение:

  `a[i] >= a[2*i]` и **`a[i] >= a[2*i+1]`**

  или

  `a[i/2] <= a[i]`

  - Сравнение может быть как в большую, так и в меньшую сторону



Пирамидальная сортировка: просеивание элемента

- Как добавить элемент в уже существующую пирамиду?
- Алгоритм:
  - Поместим новый элемент в корень пирамиды
  - Если этот элемент меньше одного из сыновей:
    - Элемент меньше наибольшего сына
    - Обменяем элемент с наибольшим сыном (это позволит сохранить свойство пирамиды для другого сына)
    - Повторим процедуру для обмененного сына

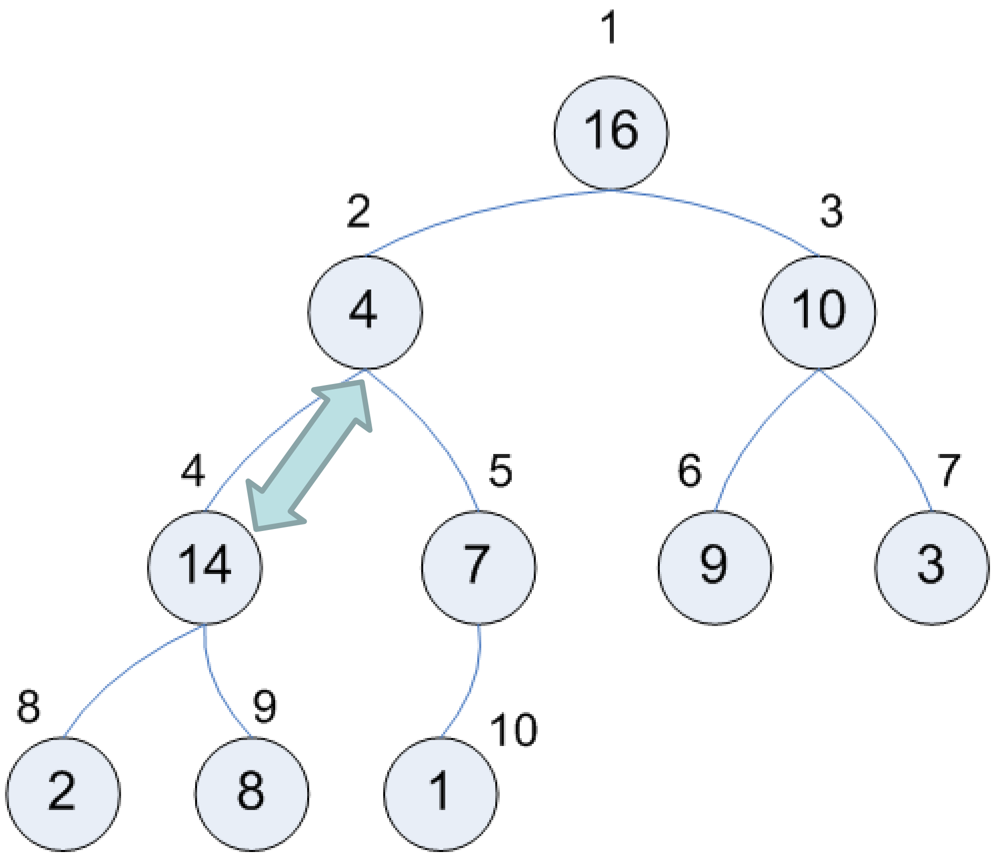
Пирамидальная сортировка: просеивание элемента

```
static void sift (int *a, int l, int r) {
  int i, j, x;

  i = l; j = 2*l; x = a[l];
  /* j указывает на наибольшего сына */
  if (j < r && a[j] < a[j + 1])
    j++;
  /* i указывает на отца */
  while (j <= r && x < a[j]) {
    /* обмен с наибольшим сыном: a[i] == x */
    a[i] = a[j]; a[j] = x;
    /* продвижение индексов к следующему сыну */
    i = j; j = 2*j;
    /* выбор наибольшего сына */
    if (j < r && a[j] < a[j + 1])
      j++;
  }
}
```

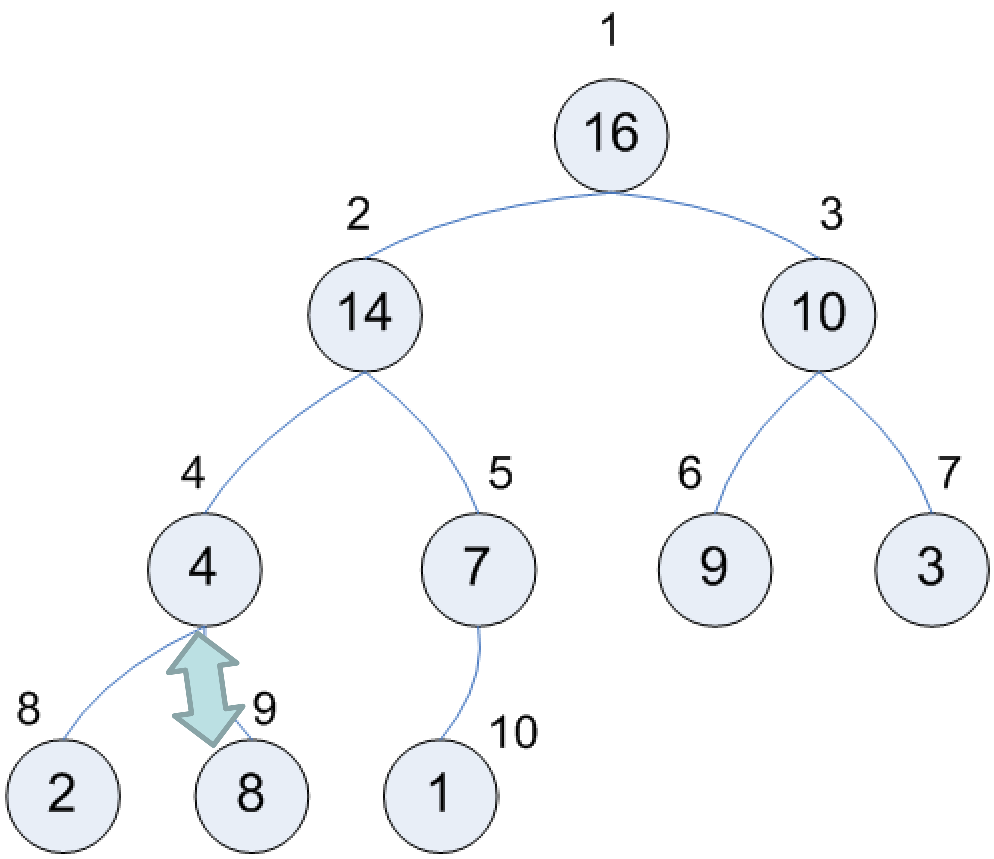
Пирамидальная сортировка: просеивание элемента

- Вызов sift (2, 10) для левого поддерева



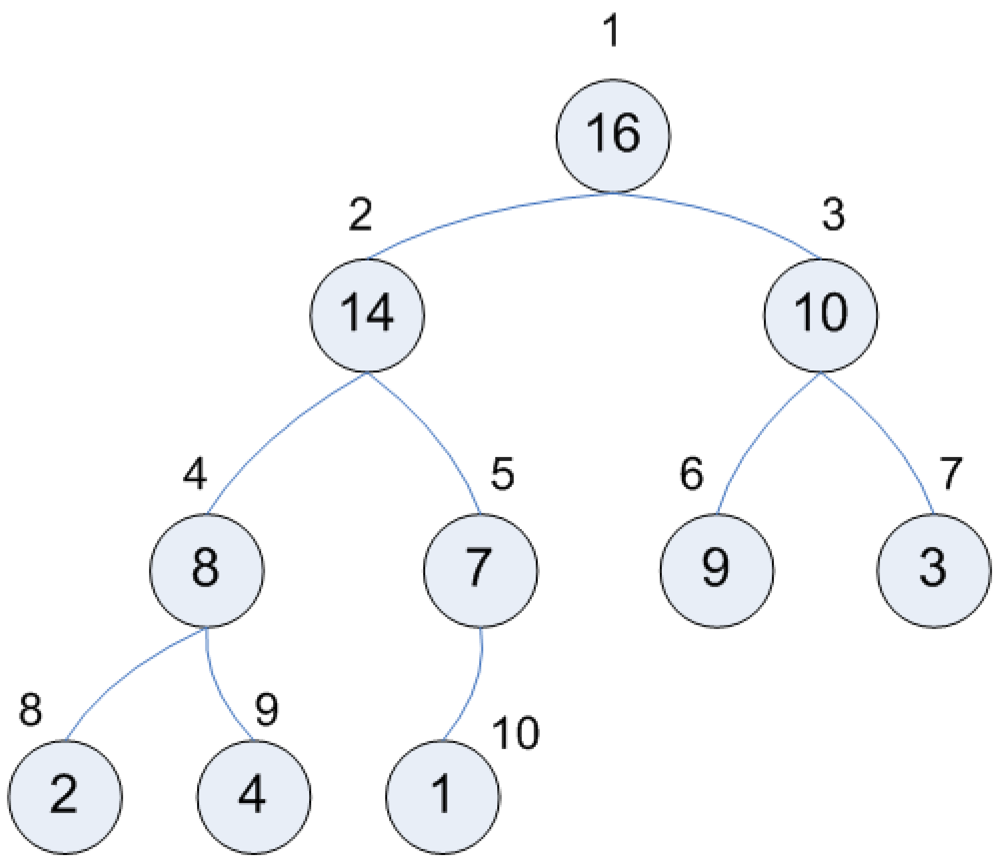
Пирамидальная сортировка: просеивание элемента

- Вызов sift (2, 10) для левого поддерева



Пирамидальная сортировка: просеивание элемента

- Вызов sift (2, 10) для левого поддерева



Пирамидальная сортировка: алгоритм

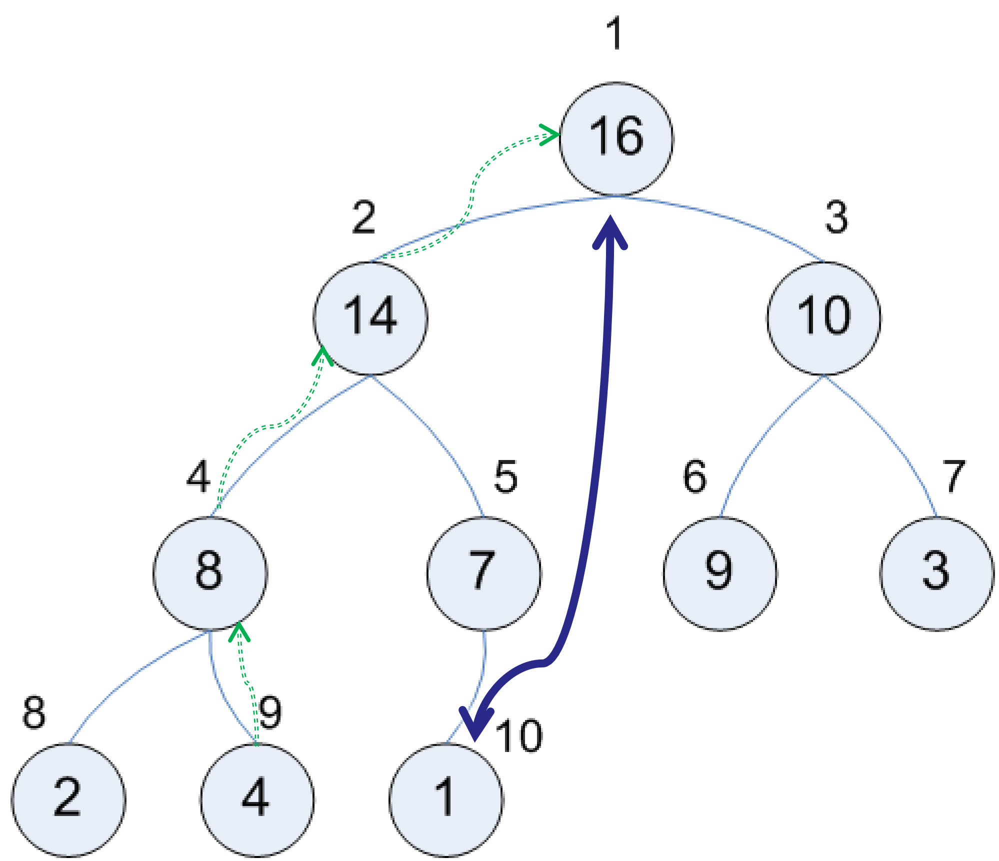
- (1) Построим пирамиду по сортируемому массиву
  - Элементы массива от n/2 до n являются листьями дерева, а следовательно, правильными пирамидами из одного элемента
  - Для остальных элементов в порядке уменьшения индекса просеиваем их через правую часть массива
- (2) Отсортируем массив по пирамиде
  - Первый элемент массива максимален (корень пирамиды)
  - Поменяем первый элемент с последним
    (таким образом, последний элемент отсортирован)
  - Теперь для первого элемента свойство кучи нарушено: повторим просеивание первого элемента в пирамиде от первого до предпоследнего
  - Снова поменяем первый и предпоследний элемент и т.п.

Пирамидальная сортировка: программа

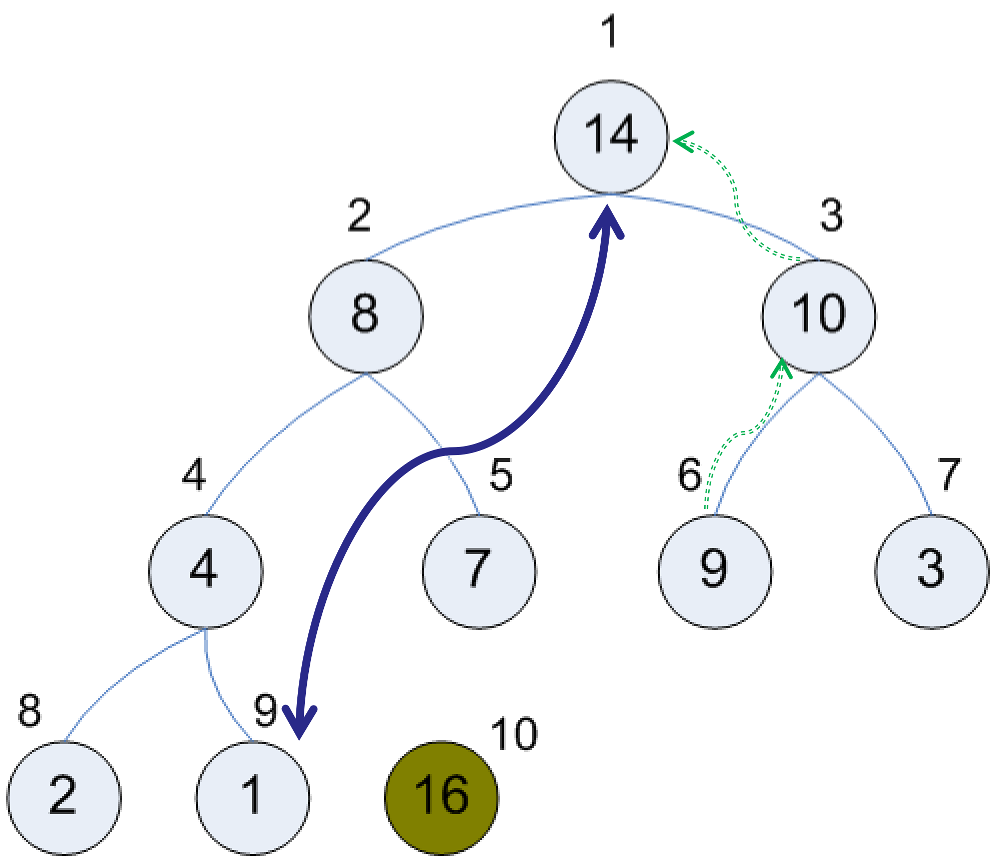
```
void heapsort (int *a, int n) {
  int i, x;

  /* Построим пирамиду по сортируемому массиву */
  /* Элементы нумеруются с 0 -> идем от n/2-1 */
  for (i = n/2 - 1; i >= 0; i--)
    sift (a, i, n - 1);
  for (i = n - 1; i > 0; i--) {
    /* Текущий максимальный элемент в конец */
    x = a[0]; a[0] = a[i]; a[i] = x;
    /* Восстановим пирамиду в оставшемся массиве */
    sift (a, 0, i - 1);
  }
}
```

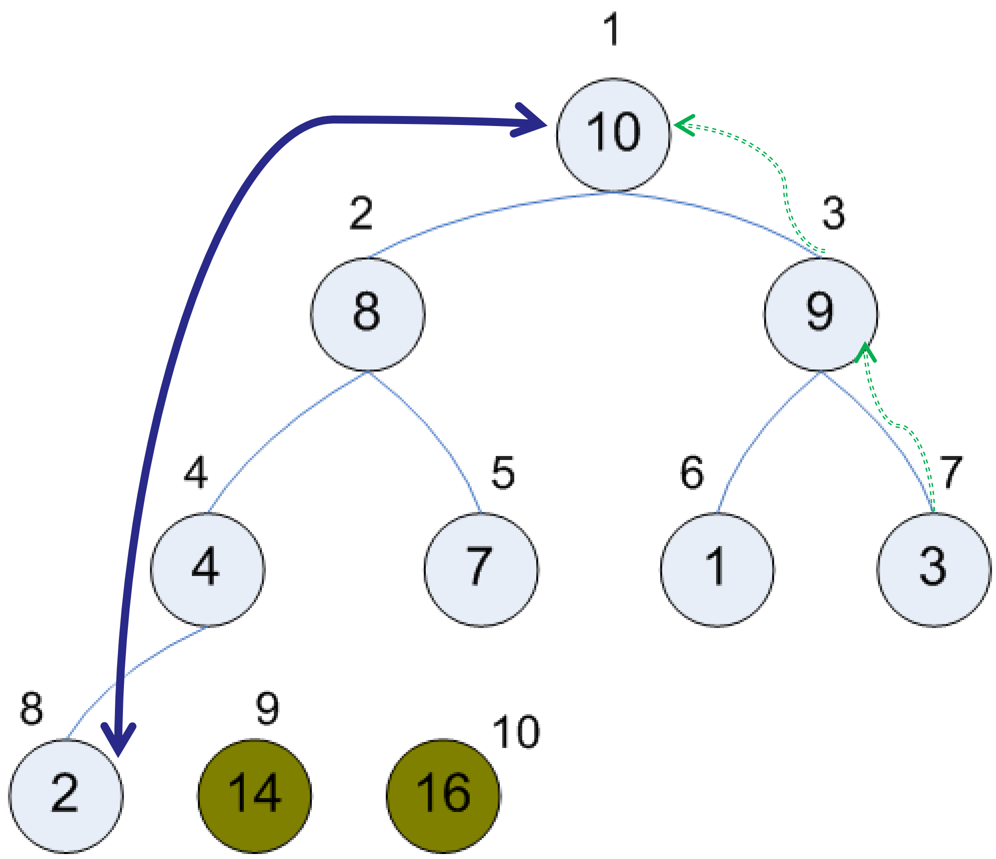
Пирамидальная сортировка: пример



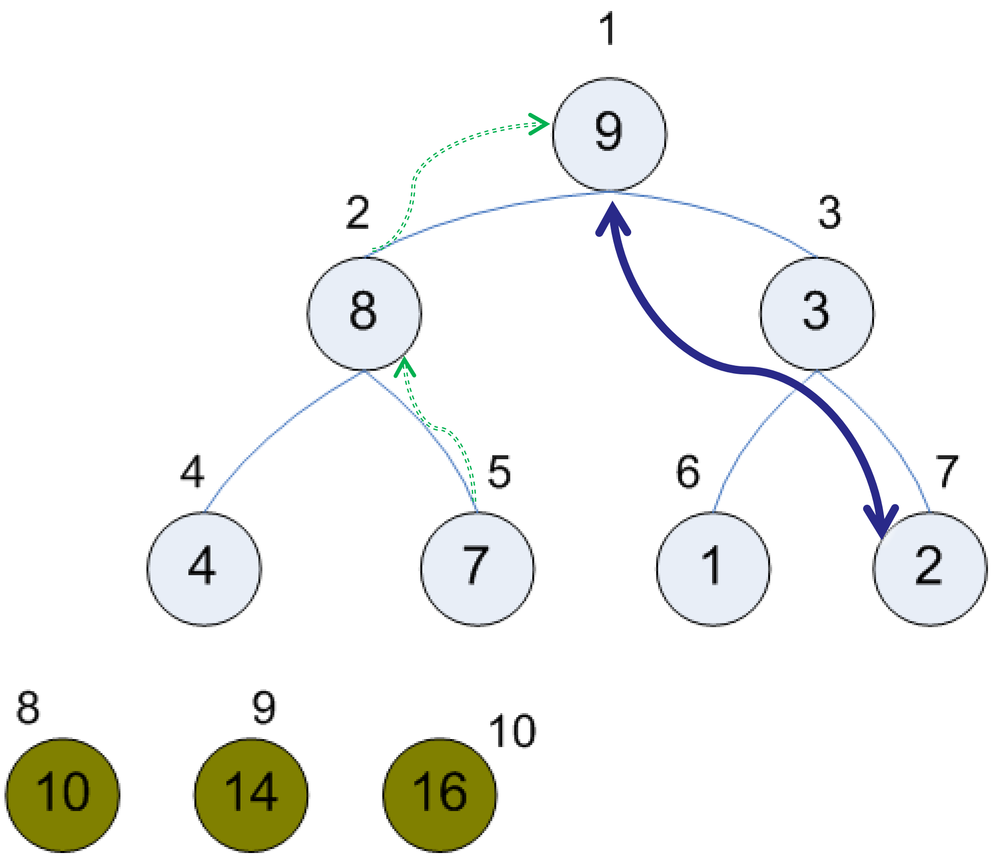
Пирамидальная сортировка: пример



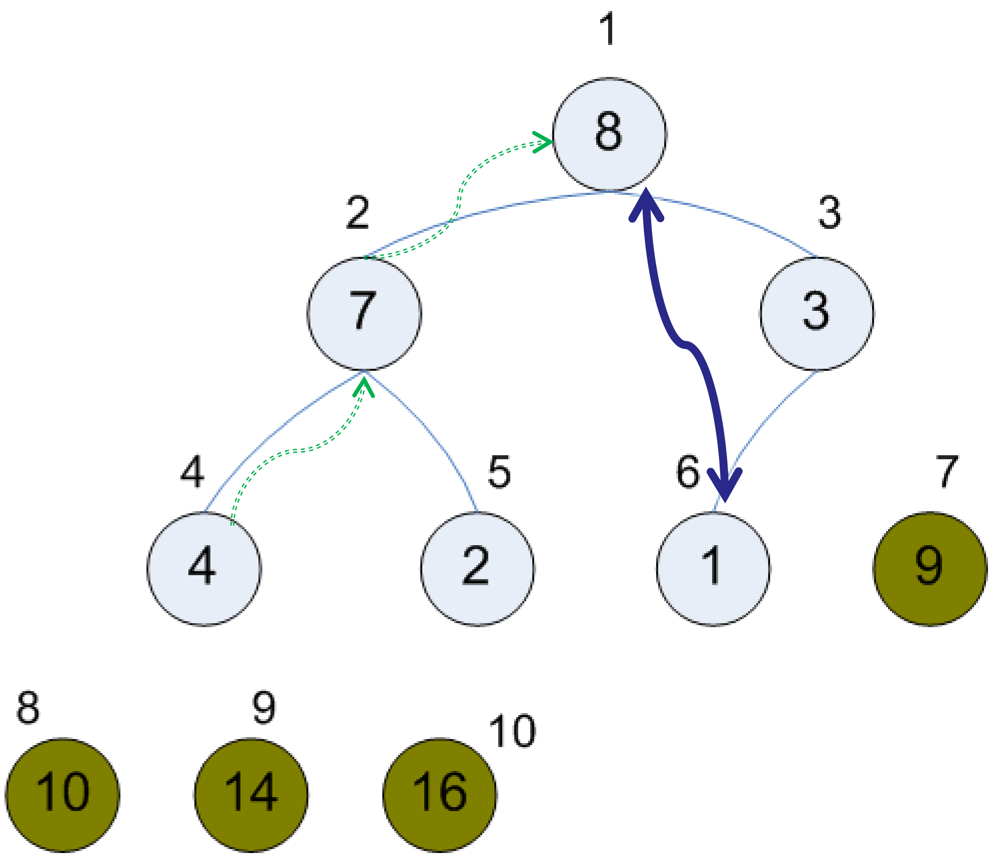
Пирамидальная сортировка: пример



Пирамидальная сортировка: пример



Пирамидальная сортировка: пример



Пирамидальная сортировка: сложность алгоритма

- (1) Построим пирамиду по сортируемому массиву
  - Элементы массива от n/2 до n являются листьями дерева, а следовательно, правильными пирамидами из 1 элемента
  - Для остальных элементов в порядке уменьшения индекса просеиваем их через правую часть массива
- (2) Отсортируем массив по пирамиде
  - Первый элемент массива максимален (корень пирамиды)
  - Поменяем первый элемент с последним (таким образом, последний элемент отсортирован)
  - Теперь для первого элемента свойство кучи нарушено: повторим просеивание первого элемента в пирамиде от первого до предпоследнего
  - Снова поменяем первый и предпоследний элемент и т.п.

- Сложность этапа построения пирамиды есть $O(n)$
- Сложность этапа сортировки есть $O(n \log n)$
- Сложность в худшем случае также $O(n \log n)$
- Среднее количество обменов – $n/2 * \log n$

Хеш-таблицы

- Словарные операции: *добавление*, *поиск* и *удаление* элементов по их ключам.
- Организуется таблица ключей: массив **Index[m]** длины **m**, элементы которого содержат значение ключа и указатель на данные (информацию), соответствующие этому ключу.
  - ***Прямая адресация***. Применяется, когда количество возможных ключей невелико: например, ключи перенумерованы целыми числами из множества $U = \{0, 1, 2, \ldots, m - 1\}$, где m не очень большое число.
  - В случае прямой адресации ключ с номером k соответствует элементу **Index[k]**. Этот ключ обычно не записывается в элемент массива, т.к. совпадает с индексом.
  - Все три словарные операции выполняются за время порядка $O(1)$.
  - Основной недостаток прямой адресации – таблица *Index* занимает слишком много места, если множество всевозможных ключей U достаточно велико (m большое целое число).

Хеш-таблицы

- ***Хеширование*** тоже позволяет обеспечить среднее время операций с данными $T_{ср}(n) = O(1)$ и тоже за счет использования таблицы *Index*.
- Хеш-таблица использует память объемом $\Theta(|K|)$, где $|K|$ – мощность множества использованных ключей (правда, это оценка в среднем, а не в худшем случае, да и то при определенных предположениях).
- В случае хеш-адресации элементу с ключом *key* отводится строка таблицы с номером *hash*(*key*), где $hash: U \rightarrow \{0, 1, 2, \ldots, m - 1\}$ – *хеш-функция*. Число *hash*(*key*) называется *хеш-значением* ключа *key*.
- Если хеш-значения ключей key_1 и key_2 совпадают ($hash(key_1) == hash(key_2)$), говорят, что случилась *коллизия*. Выбрать хеш-функцию, для которой коллизии исключены, возможно лишь тогда, когда все возможные значения ключей заранее известны. В общем же случае коллизии неизбежны, так как $|U| > m$.

Хеш-таблицы

- Простейший способ обработки коллизий – сцепление элементов с одинаковыми значениями хеш-функции: все такие элементы сцепляются в список, а в хеш-таблицу помещается указатель на первый элемент этого списка. В пределах каждого такого списка осуществляется последовательный поиск.
- В случае использования двусвязного списка среднее время выполнения каждой из трех словарных операций будет иметь порядок $O(1)$. Основная трудность – в поиске по списку, но коллизий не очень много и *hash*(*key*) можно выбрать так, чтобы списки были достаточно короткими.
- Примером хеш-таблицы с цепочками является записная книжка с алфавитом.

Хеш-таблицы

- Устройство простой хеш-таблицы (реализация хеширования с цепочками).
  - Задается некоторое фиксированное число *m* (типичные значения *m* от 100 до 1,000,000).
  - Создается массив **Index[m]** указателей начал двусвязных списков (цепочек), который называется *индексом* хеш-таблицы. В начале работы все указатели имеют значения *NULL*.
  - Задается хеш-функция *hash*(), которая получает на вход ключи и выдает значение от 0 до *m* – 1.
  - При добавлении пары (*key*, *value*) вычисляется *h* = *hash*(*key*) и пара добавляется в список **Index[h].**
  - При удалении либо поиске пары (*key*, *value*) вычисляется *h* = *hash*(*key*) и происходит удаление либо поиск пары (*key*, *value*) в списке **Index[h]**.

Хеш-таблицы

- Анализ хеширования с цепочками.
  - Пусть **Index[m]** – хеш-таблица с *m* позициями, в которую занесено *n* пар (*key*, *value*). Отношение α = *n*/*m* называется *коэффициентом заполнения* хеш-таблицы.
  - Коэффициент заполнения α позволяет судить о качестве хеш-функции:
    пусть $M = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} | Index[i] |$ – средняя длина списков;
    если *hash*(*key*) – «хорошая» хеш-функция, то дисперсия $D = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\left(M - | Index[i] |\right)^2 \le \alpha$.
  - Это условие исключает наихудший случай, когда хеш-значения всех ключей одинаковы, заполнен только один список и поиск в этом списке из *n* элементов имеет среднее время Θ(*n*).

Хеш-таблицы

- Анализ хеширования с цепочками.
  - *Равномерное хеширование*: хеш-функция подобрана таким образом, что каждый данный элемент может попасть в любую из m позиций хеш-таблицы с равной вероятностью, независимо от того, куда попали другие элементы.
  - Условие из предыдущего слайда выполняется и *средняя длина каждого из m списков хеш-таблицы с коэффициентом заполнения α равна α*.
  - Среднее время поиска элемента, отсутствующего в таблице, пропорционально средней длине списка α, так как поиск сводится к просмотру одного из списков.
  - Поскольку среднее время вычисления хеш-функции равно $\Theta(1)$, то среднее время выполнения каждой из словарных операций с учетом вычисления хеш-функции равно $\Theta(1 + \alpha)$.

Хеш-таблицы

- ***Теорема***. Пусть T – хеш-таблица с цепочками, имеющая коэффициент заполнения α, причем хеширование равномерно. Тогда при поиске элемента, **отсутствующего** в таблице, будет просмотрено в среднем α элементов таблицы, а время поиска, включая время на вычисление хеш-функции, будет равно $\Theta(1 + \alpha)$.
- ***Теорема***. При равномерном хешировании среднее время **успешного** поиска в хеш-таблице с коэффициентом заполнения α есть $\Theta(1 + \alpha)$.
  - ***Замечание***. Теорема не сводится к предыдущей, так как в предыдущей теореме оценивалось среднее число действий, необходимых для поиска случайного элемента, равновероятно попадающего в любую из ячеек таблицы.
  - В этой теореме сначала рассматривается случайно выбранная последовательность элементов, добавляемых в таблицу (на каждом шаге все значения ключа равновероятны и шаги независимы); потом в полученной таблице выбираем элемент для поиска, считая, что все ее элементы равновероятны.
- Из теорем следует, что в случае равномерного хеширования среднее время выполнения любой словарной операции есть $O(1)$.

Методы построения хеш-функций

- Построение хеш-функции ***методом деления с остатком***.
  - Хеш-функция *hash*(*key*) определяется соотношением
    hash(key) = key % m.
  - При правильном выборе *m* такая хеш-функция обеспечивает распределение, близкое к равномерному.
  - Правильный выбор *m*: в качестве *m* выбирается достаточно большое простое число, далеко отстоящее от степеней двойки.
  - Например, если устраивает средняя длина списков 3, а число записей, доступ к которым нужно обеспечить с помощью хеш-таблицы $\approx$ 2000, то можно взять $m = 2000/3 \approx 701$. Тогда *hash*(*key*) = *key %* 701.
  - Недостаток: в качестве *m* нельзя брать степень двойки, так как если $m = 2^p$, то *hash*(*key*) – это просто *p* младших битов числа *key*.

Методы построения хеш-функций

- Построение хеш-функции ***методом умножения***.
  - Пусть количество хеш-значений равно *m*. Выберем и зафиксируем вещественную константу *v*, $0 < v < 1$; положим ***hash(key)*** **=** $\lfloor \mathbf{m(frac(key \cdot \mathit{v}))} \rfloor$ frac(key$\cdot$*v*) – дробная часть числа $key \cdot v$.
  - Достоинство метода умножения в том, что качество хеш-функции слабо зависит от выбора *m*. Обычно в качестве *m* выбирают степень двойки, так как в этом случае умножение на *m* сводится к сдвигу.
  - ***Пример***. Пусть в используемом компьютере длина слова равна *w* битам и ключ *key* помещается в одно слово.
  - Если $m = 2^p$, то вычисление *hash*(*key*) можно выполнить следующим образом: умножим *key* на *w*-битовое целое число $v \cdot 2^w$; получится 2*w*-битовое число r_0.

    В качестве значения *hash*(*key*) возьмем старшие *p* битов "дробной" части числа $r_0 / 2^w$ ($r_0 \% 2^w$ или обнуление *w* старших разрядов, потом умножение на $m = 2^p$).
  - Согласно Д. Кнуту выбор $v = \left(\sqrt{5} - 1\right) / 2 = 0.6180339887...$ является удачным.

Хеш-функции: программы

```
#define MAX 701    /* размер хеш-таблицы */
struct htype {
  int key;         /* ключ */
  int val;         /* значение элемента данных */
  struct htype *next;    /* указатель на следующий элемент
                            цепочки */
  struct htype *prvs;    /* указатель на предыдущий элемент
                            цепочки */
};
struct htype *index[MAX];
```

Хеш-функции: программы

```
#define MAX 701    /* размер хеш-таблицы */
static inline int hash (int key) {
  return key % MAX;
}
/* инициализация хеш-таблицы */
void init (void) {
  int i;
  for (i = 0; i < MAX; i++)
    index[i] = NULL; /* массив начал цепочек */
}
```

Хеш-функции: программы

```
/* Вычисление хеш-адреса и поиск по ключу k:
   если элемент с ключом k найден, возвращаем указатель
   на него, если нет, возвращаем NULL */
struct htype *search (int k) {
  /* вычисление хеш-адреса */
  int h = hash (k);
  /* поиск ключа k */
  if (index[h]) {
    struct htype *p = index[h];
    do {
      if (p->key == k)
        return p;
      else
        p = p->next;
    } while (p);
  }
  return NULL;
}
```

Хеш-функции: программы

```
/* Порождение нового элемента цепочки и возврат указателя
   на него */
struct htype *new (void) {
  struct htype *p;
  p = malloc (sizeof (struct htype));
  if (!p)
    abort ();
  p->key = -1;
  p->val = 0;
  p->next = NULL;
  p->prvs = NULL;
  return p;
}
```

Хеш-функции: программы

```
/* Вычисление хеш-адреса и поиск по ключу k: если элемент с ключом k
   найден, возвращаем значение true и указатель на найденный элемент;
   если элемент не найден, возвращаем значение false и указатель на
   последний элемент либо NULL, если цепочка пустая */
static bool search_internal (int k, struct htype **r) {
  struct htype *p, *q;

  if ((p = index[hash (k)]) != NULL) {
    do {
      if (p->key == k) {
        *r = p;
        return true;
      }
      else
        q = p, p = p->next;
  } while (p);
    *r = q;
  } else
    *r = NULL;
  return false;
}
```

Хеш-функции: программы

```
/* Добавление новой пары (key, value) */
void insert (int k, int v) {
  struct htype *p, *q;
  /* Если элемент с ключом k уже имеется в цепочке,
     изменяем его значение на v */
  if (search_internal (k, &p))
    p->val = v;
  else {
    /* Если элемента с ключом k в цепочке нет */
    /* порождение и инициализация нового элемента цепочки */
    q = new ();
    q->key = k;
    q->val = v;
     /* Включение порожденного элемента в цепочку */
    if (p) {
      p->next = q;
      q->prvs = p;
    } else
      index[hash (k)] = q;
  }
}
```

Хеш-функции: программы

```
/* Исключение пары (key, value) */
void delete (int k, int v) {
  struct htype *p;
  if (search_internal (k, &p)) {
    if (p->prvs)
      p->prvs->next = p->next;
    else
      index[hash (k)] = p->next;
    if (p->next)
      p->next->prvs = p->prvs;
    free (p);
  }
  /* иначе ничего не нашли, удалять не нужно */
}
```

// Дома. Сделайте так, чтобы хеш-функция не вычислялась дважды (внутри search_internal и внутри insert/delete).