Курс «Алгоритмы и алгоритмические языки»
1 семестр 2015/2016

Лекция 25

Пирамидальная сортировка (heapsort)

- Можно использовать дерево поиска для сортировки
- Например, последовательный поиск минимального элемента, удаление его и вставка в отсортированный массив
  - Сложность такого алгоритма есть $O(nh)$, где h – высота дерева
- Недостатки:
  - Требуется дополнительная память для дерева
  - Требуется построить само дерево (с минимальной высотой)
- Можно ли построить похожий алгоритм без требований к дополнительной памяти?

Пирамидальная сортировка: пирамида (двоичная куча)

- Рассматриваем массив **a** как двоичное дерево:
  - Элемент **a[i]** является узлом дерева
  - Элемент **a[i/2]** является родителем узла **a[i]**
  - Элементы **a[2*i]** и **a[2*i+1]** являются детьми узла **a[i]**

- Для всех элементов пирамиды выполняется соотношение (основное свойство кучи):
  a[i] >= a[2*i] и **a[i] >= a[2*i+1]**
  или
  a[i/2] <= a[i]
  - Сравнение может быть как в большую, так и в меньшую сторону

- **Замечание**. Определение предполагает нумерацию элементов массива от 1 до n
  - Для нумерации от 0 до n-1:
  a[i] >= a[2*i+1] и **a[i] >= a[2*i+2]**

Пирамидальная сортировка: пирамида (двоичная куча)

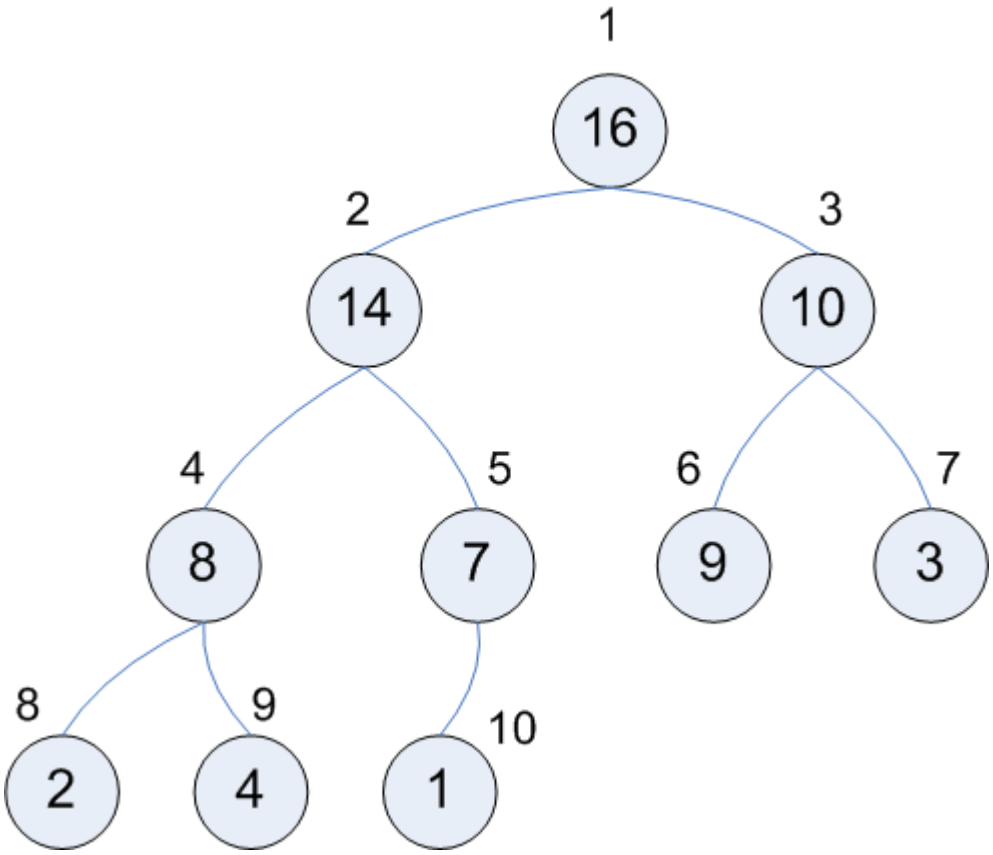
- Для всех элементов пирамиды выполняется соотношение:

  `a[i] >= a[2*i]` и **`a[i] >= a[2*i+1]`**

  или

  `a[i/2] <= a[i]`

  - Сравнение может быть как в большую, так и в меньшую сторону



Пирамидальная сортировка: просеивание элемента

- Как добавить элемент в уже существующую пирамиду?
- Алгоритм:
  - Поместим новый элемент в корень пирамиды
  - Если этот элемент меньше одного из сыновей:
    - Элемент меньше наибольшего сына
    - Обменяем элемент с наибольшим сыном (это позволит сохранить свойство пирамиды для другого сына)
    - Повторим процедуру для обмененного сына

Пирамидальная сортировка: просеивание элемента

```
static void sift (int *a, int l, int r) {
  int i, j, x;

  i = l; j = 2*l; x = a[l];
  /* j указывает на наибольшего сына */
  if (j < r && a[j] < a[j + 1])
    j++;
  /* i указывает на отца */
  while (j <= r && x < a[j]) {
    /* обмен с наибольшим сыном: a[i] == x */
    a[i] = a[j]; a[j] = x;
    /* продвижение индексов к следующему сыну */
    i = j; j = 2*j;
    /* выбор наибольшего сына */
    if (j < r && a[j] < a[j + 1])
      j++;
  }
}
```

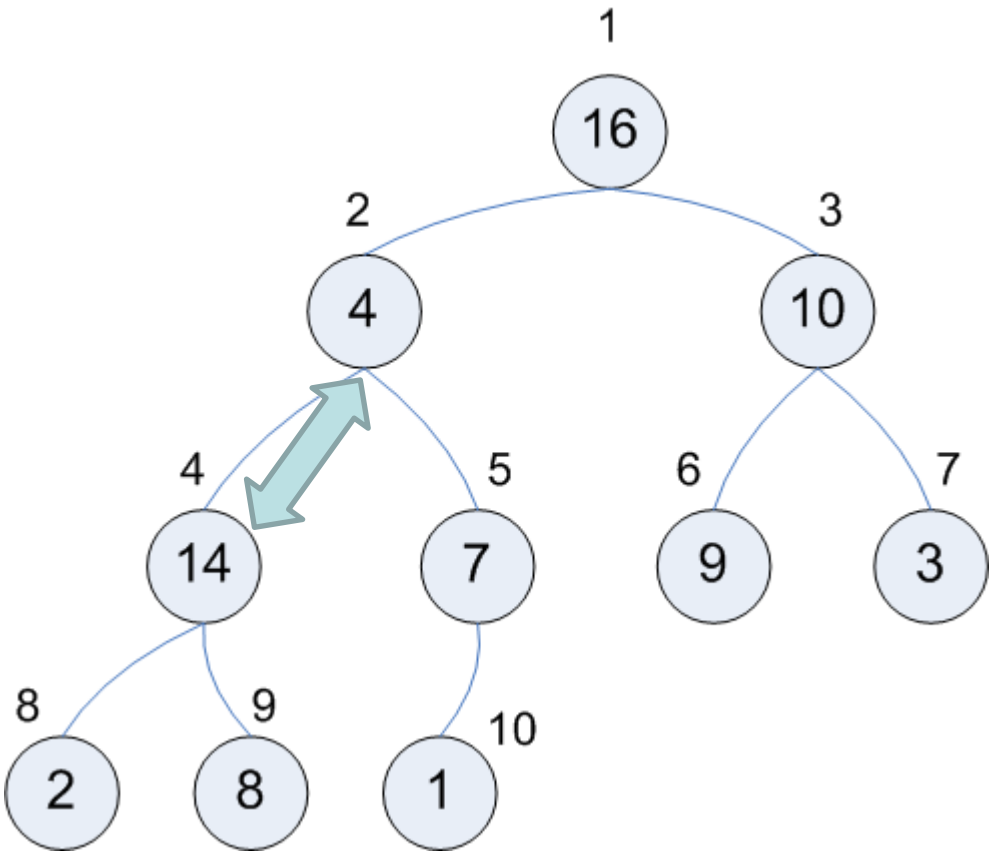
Пирамидальная сортировка: просеивание элемента

```
/* l, r - от 0 до n-1 */
static void sift (int *a, int l, int r) {
  int i, j, x;

  /* Теперь l, r, i, j от 1 до n, а индексы массива
     уменьшаются на 1 при доступе */
  l++, r++;
  i = l; j = 2*l; x = a[l-1];
  /* j указывает на наибольшего сына */
  if (j < r && a[j-1] < a[j])
    j++;
  /* i указывает на отца */
  while (j <= r && x < a[j-1]) {
    /* обмен с наибольшим сыном: a[i-1] == x */
    a[i-1] = a[j-1]; a[j-1] = x;
    /* продвижение индексов к следующему сыну */
    i = j; j = 2*j;
    /* выбор наибольшего сына */
    if (j < r && a[j-1] < a[j])
      j++;
  }
}
```

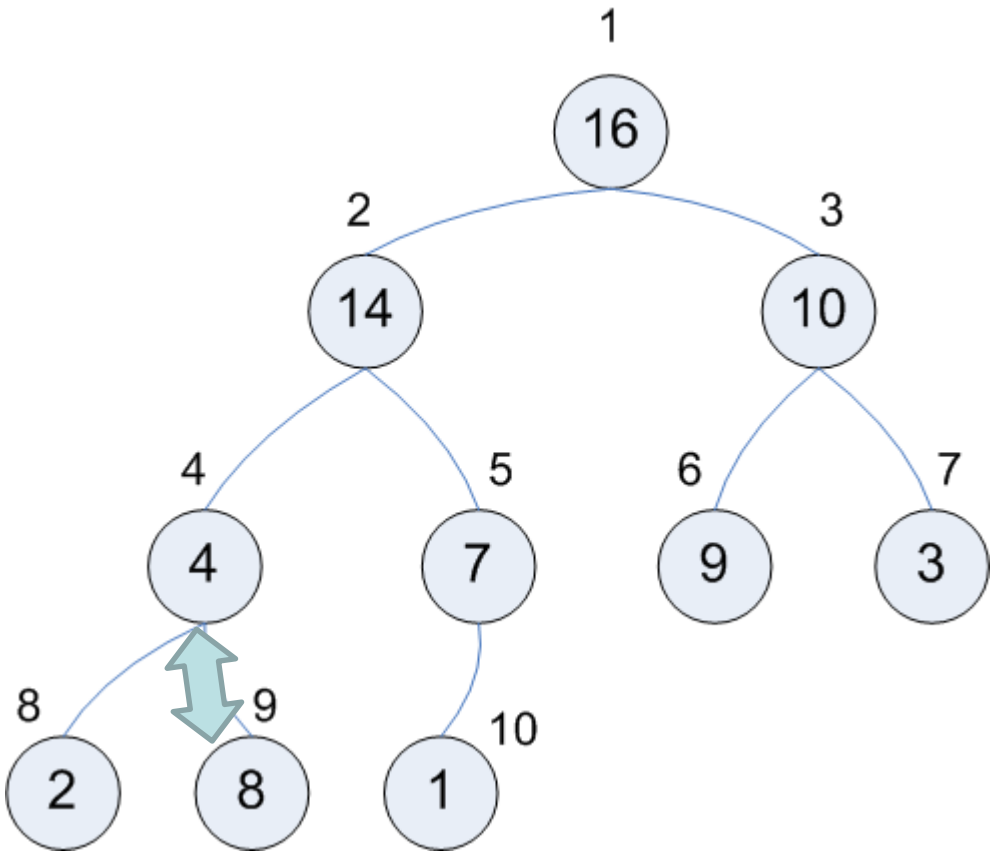
Пирамидальная сортировка: просеивание элемента

- Вызов sift (2, 10) для левого поддерева



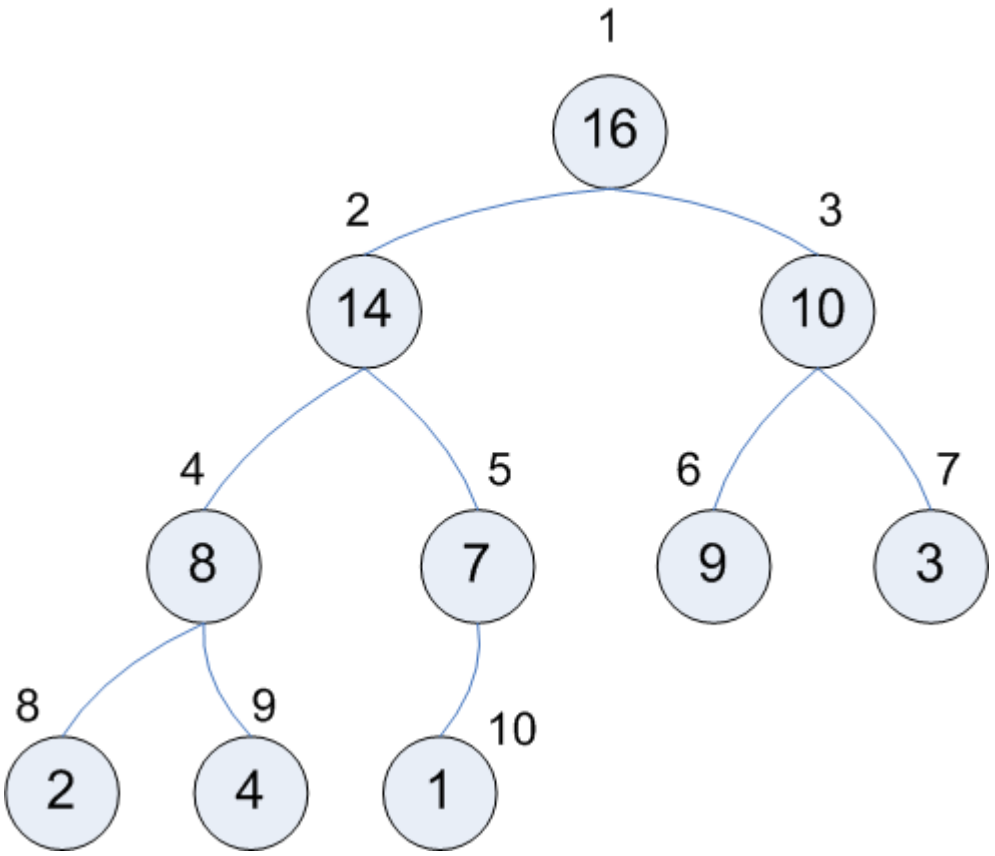
Пирамидальная сортировка: просеивание элемента

- Вызов sift (2, 10) для левого поддерева



Пирамидальная сортировка: просеивание элемента

- Вызов sift (2, 10) для левого поддерева



Пирамидальная сортировка: алгоритм

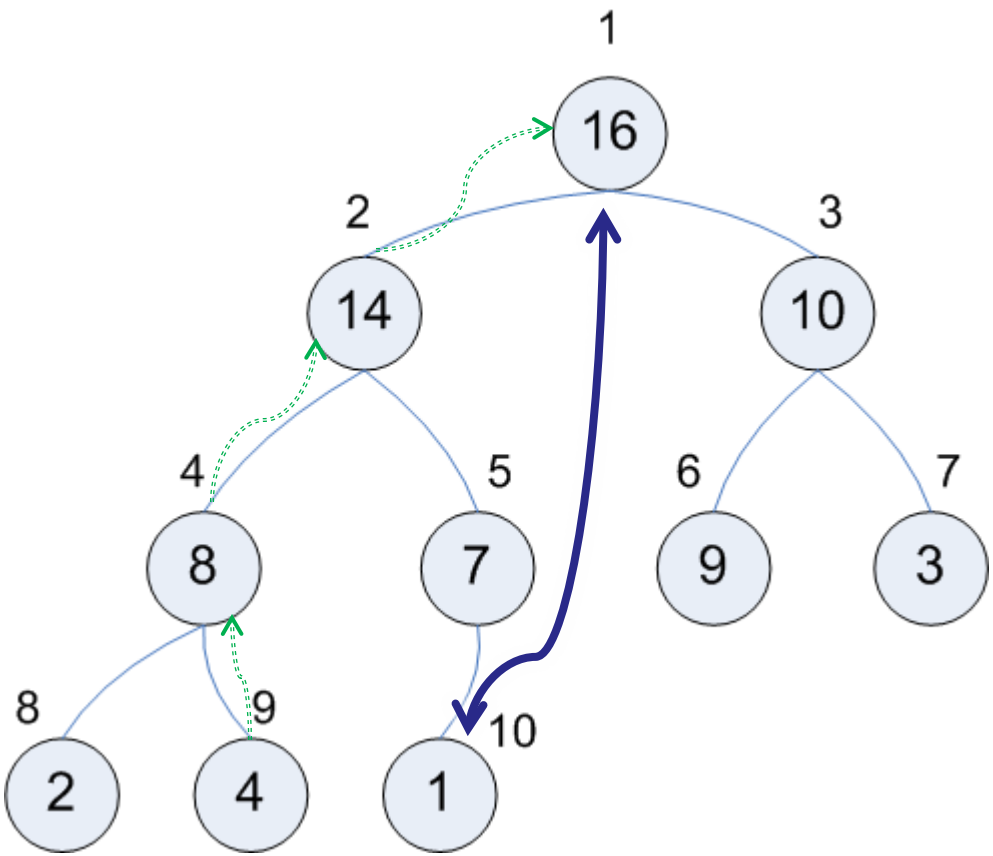
- (1) Построим пирамиду по сортируемому массиву
  - Элементы массива от n/2 до n являются листьями дерева, а следовательно, правильными пирамидами из одного элемента
  - Для остальных элементов в порядке уменьшения индекса просеиваем их через правую часть массива
- (2) Отсортируем массив по пирамиде
  - Первый элемент массива максимален (корень пирамиды)
  - Поменяем первый элемент с последним (таким образом, последний элемент отсортирован)
  - Теперь для первого элемента свойство кучи нарушено: повторим просеивание первого элемента в пирамиде от первого до предпоследнего
  - Снова поменяем первый и предпоследний элемент и т.п.

Пирамидальная сортировка: программа

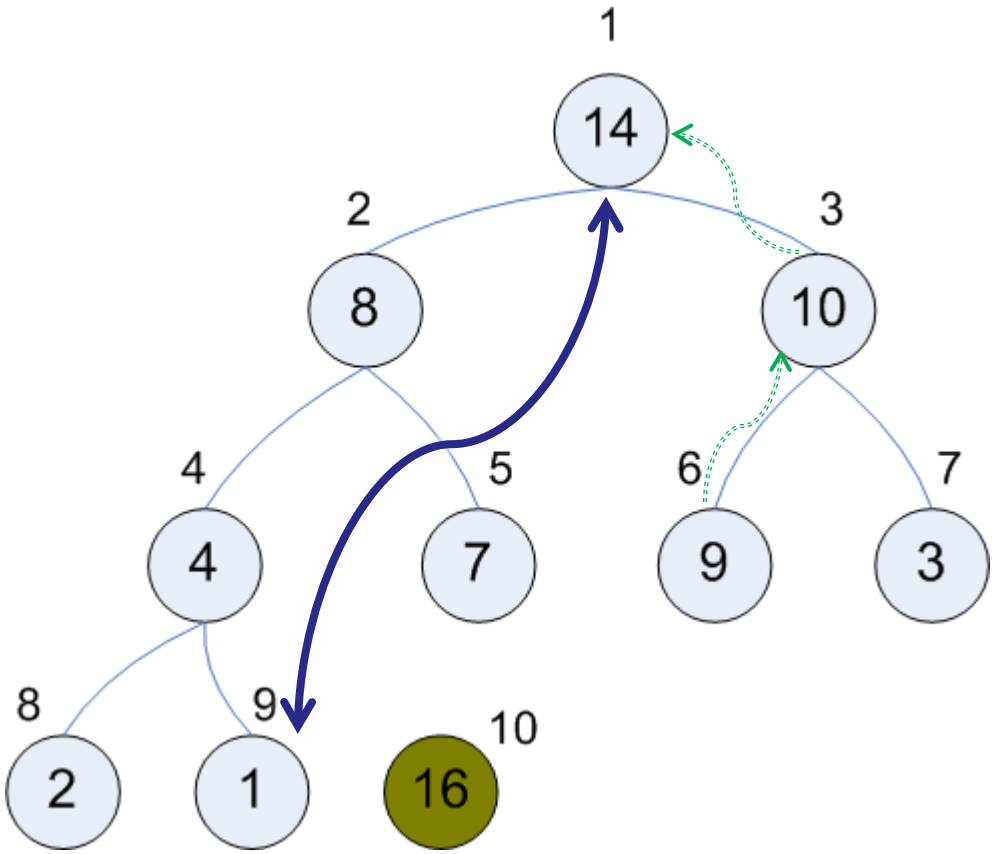
```
void heapsort (int *a, int n) {
  int i, x;

  /* Построим пирамиду по сортируемому массиву */
  /* Элементы нумеруются с 0 -> идем от n/2-1 */
  for (i = n/2 - 1; i >= 0; i--)
    sift (a, i, n - 1);
  for (i = n – 1; i > 0; i--) {
    /* Текущий максимальный элемент в конец */
    x = a[0]; a[0] = a[i]; a[i] = x;
    /* Восстановим пирамиду в оставшемся массиве */
    sift (a, 0, i – 1);
  }
}
```

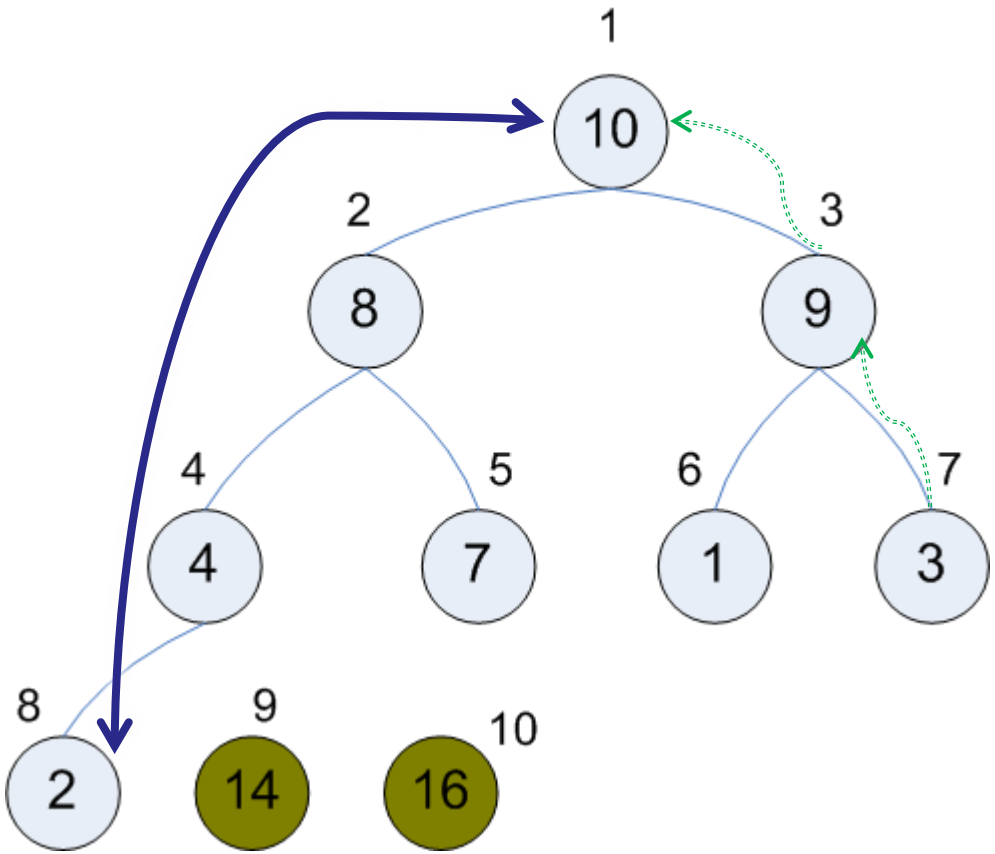
Пирамидальная сортировка: пример



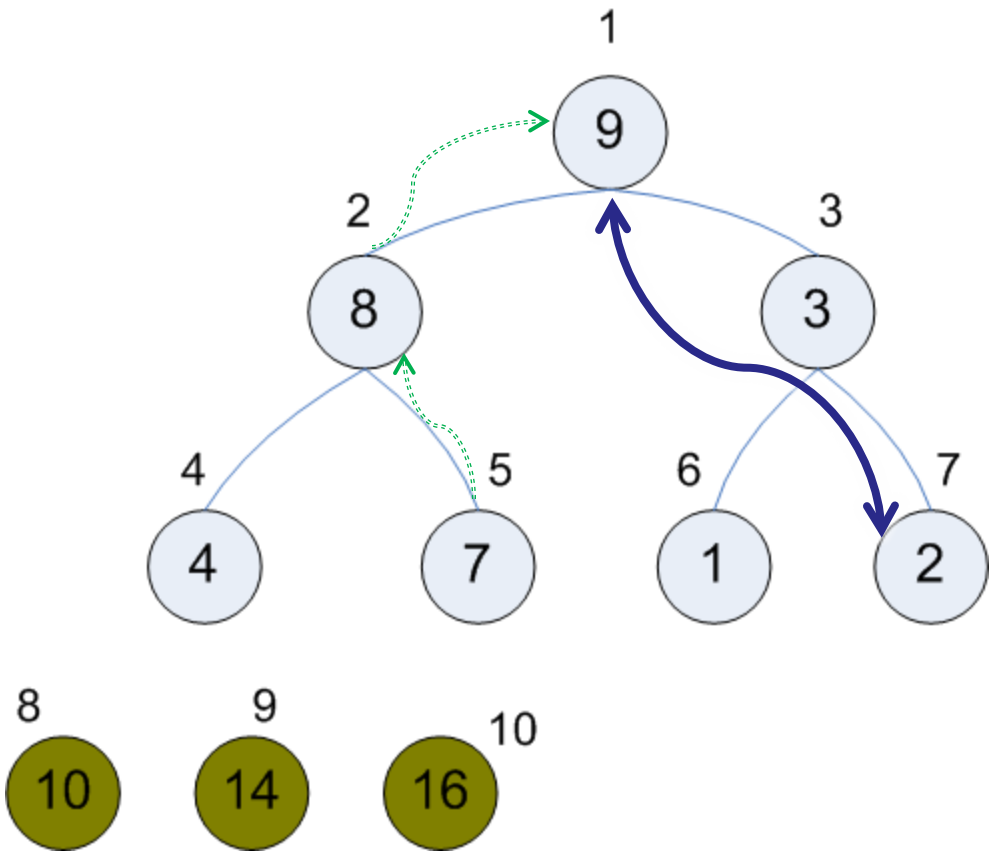
Пирамидальная сортировка: пример



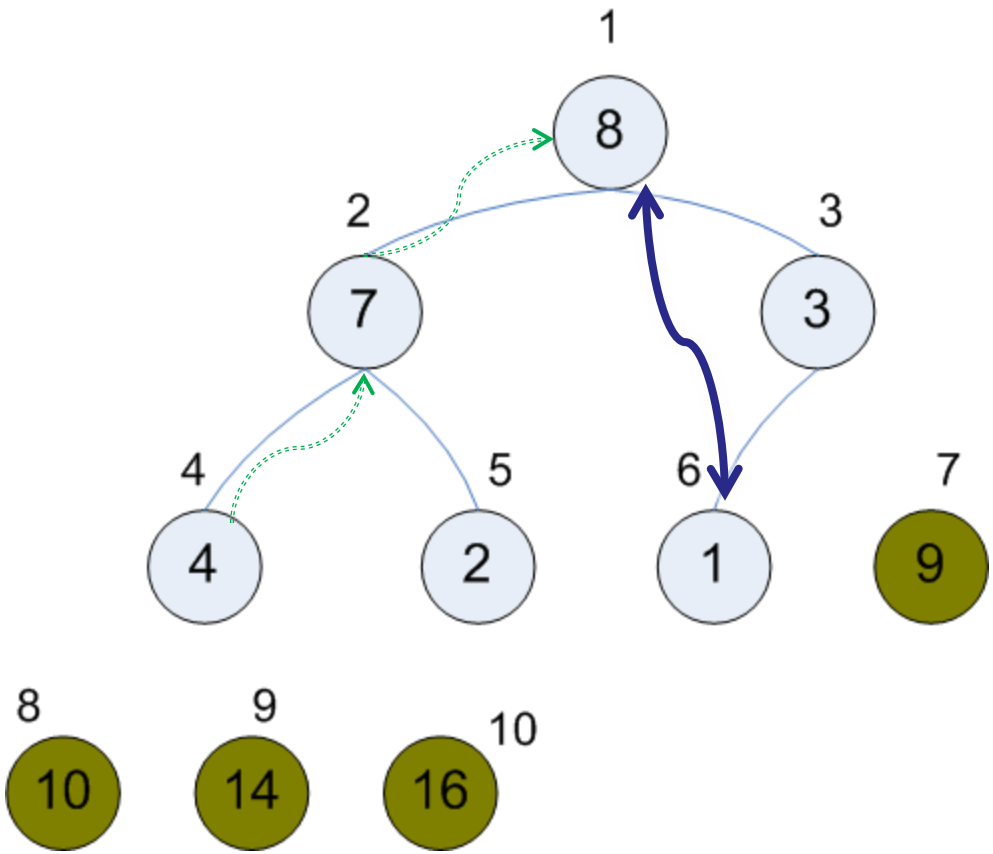
Пирамидальная сортировка: пример



Пирамидальная сортировка: пример



Пирамидальная сортировка: пример



Пирамидальная сортировка: сложность алгоритма

- (1) Построим пирамиду по сортируемому массиву
  - Элементы массива от n/2 до n являются листьями дерева, а следовательно, правильными пирамидами из 1 элемента
  - Для остальных элементов в порядке уменьшения индекса просеиваем их через правую часть массива
- (2) Отсортируем массив по пирамиде
  - Первый элемент массива максимален (корень пирамиды)
  - Поменяем первый элемент с последним (таким образом, последний элемент отсортирован)
  - Теперь для первого элемента свойство кучи нарушено: повторим просеивание первого элемента в пирамиде от первого до предпоследнего
  - Снова поменяем первый и предпоследний элемент и т.п.

- Сложность этапа построения пирамиды есть $O(n)$
- Сложность этапа сортировки есть $O(n \log n)$
- Сложность в худшем случае также $O(n \log n)$
- Среднее количество обменов – $n/2 * \log n$

Цифровой поиск

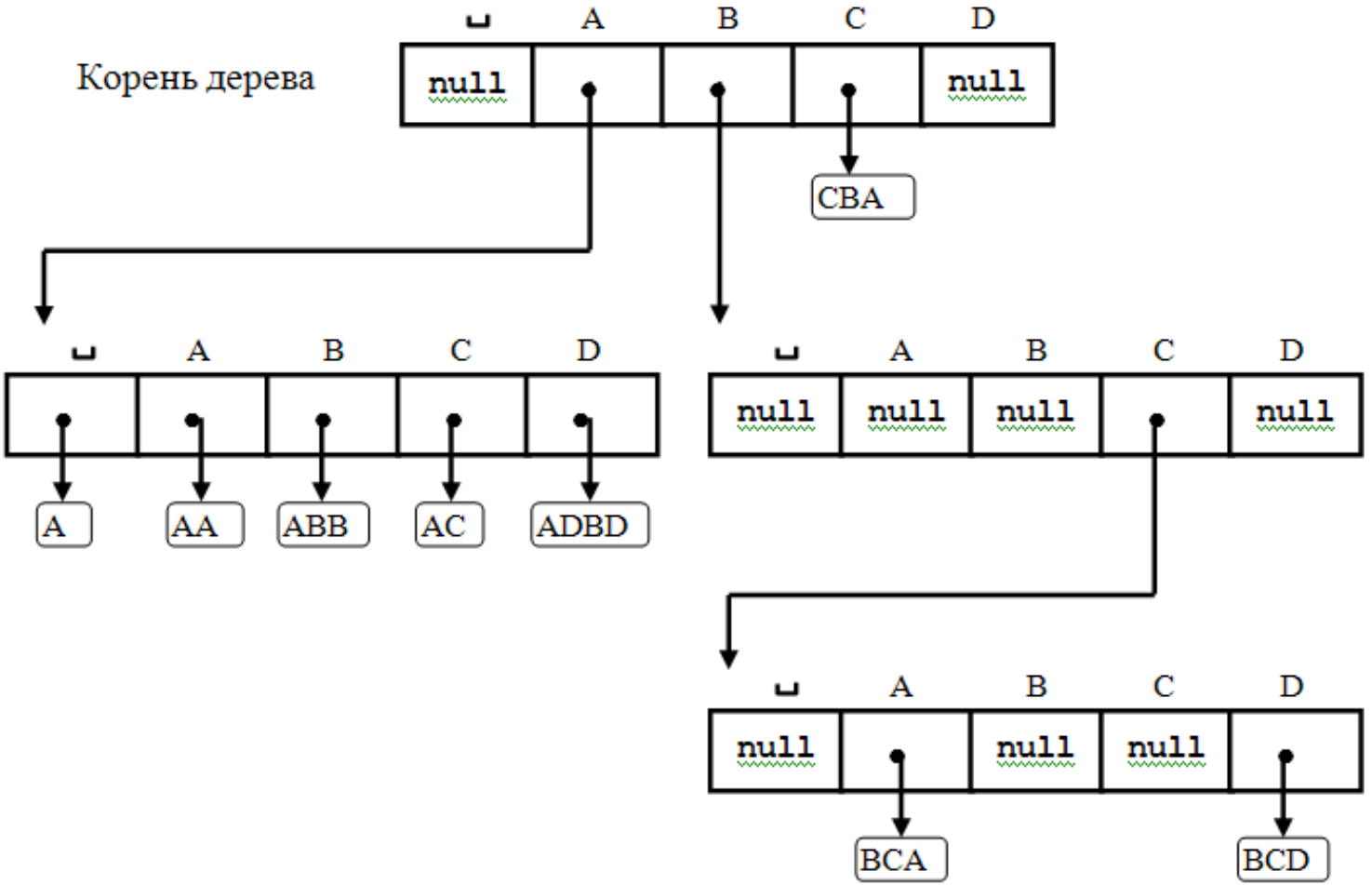
- *Цифровой поиск* – частный случай поиска заданной подстроки (*образца*) в длинной строке (*тексте*).
- *Примеры цифрового поиска*: поиск в словаре, в библиотечном каталоге и т.п., когда делается поиск по образцу в нескольких текстах (названиях книг, фамилиях авторов, текстах на вызванных сайтах и т.п.).
- Хороший пример – *словарь с высечками*, т.е. словарь, в котором обеспечен быстрый доступ к некоторым страницам (например, начальным страницам списков слов, начинающихся на очередную букву алфавита). Иногда используются *многоуровневые высечки*.
- При цифровом поиске ключи рассматриваются как последовательности символов рассматриваемого алфавита (в частности, цифр или букв). Ожидаемое число сравнений порядка $O(\log_m N)$, где m - число различных букв, используемых в словаре, N – мощность словаря. В худшем случае дерево содержит k уровней, где k – длина максимального слова.

Цифровой поиск

- *Пример*. Пусть множество используемых букв (алфавит) {*A*, *B*, *C*, *D*}. Мы добавим к алфавиту еще одну букву␣(пробел). По определению слова *AA*, *AA*␣, *AA*␣␣ совпадают.
  Пусть {*A*, *AA*, *ABB*, *AC*, *ADBD*, *BCA*, *BCD*, *CBA*} – словарь (множество ключей).
- Построим *m*-ичное дерево, где *m* = 5 = |␣, *A*, *B*, *C*, *D* |.
  Следующая небольшая хитрость позволит иногда сократить поиск: если в словаре есть слово $a_1a_2a_3...a_k$ и первые *i* его букв (*i* < *k*) задают уникальное значение: комбинация $a_1...a_i$ встречается в словаре только один раз, то не нужно строить дерево для *j* > *i*, так как слово можно идентифицировать по первым *i* буквам.
- Очень важное обобщение цифрового поиска: таким же образом можно обрабатывать любые ключи, не привязываясь к байту (8 битам), который обычно используется для кодирования символов алфавита. Мы можем отсекать от ключа первые *m* бит, использовать 2^m-ичное разветвление, т.е. строить 2^m-ичное дерево поиска (на двоичных деревьях для разветвления берется один бит: *m* = 1).

Цифровой поиск

- Прямоугольниками изображены вершины дерева, в овалах – значения слов (ключей) и связанная с ним информация.
  Тем самым любая вершина дерева – массив из *m* элементов.
  Каждый элемент вершины содержит либо ссылку на другую вершину *m*-ичного дерева, либо на овал (ключ).



Цифровой поиск

- Иногда используют комбинации нескольких методов: цифровой поиск вначале, а затем переключение на поиск в последовательных таблицах.
  - Именно так мы и работаем со словарем с высечками: вначале на высечку, а затем либо последовательный поиск, либо дихотомический.
- Обычно предлагается пользоваться цифровым поиском, пока количество различных слов не меньше некоторого k, а затем переключаться на последовательные таблицы.
- Обобщения: поиск по неполным ключам, поиск по образцу.

Цифровой поиск

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>

#define M 5

typedef enum {word, node} tag_t;
struct record {
  char *key;
  int value;
};

struct tree {
  tag_t tag;
  union {
    struct record *r;
    struct tree *nodes[M+1];
  };  /* анонимное объединение */
};
```

Цифровой поиск: *поиск элемента*

```
static inline int ord (char c) {
  return c ? c - 'A' + 1 : 0;
}

struct record *find (struct tree *t, char *key) {
  int i = 0;

  while (t) {
    switch (t->tag) {
    case word:
      for (; key[i]; i++)
        if (key[i] != t->r->key[i])
          return NULL;
      return t->r->key[i] ? NULL : t->r;
    case node:
      t = t->nodes[ord(key[i])];
      if (key[i])
        i++;
    }
  }
  return NULL;
}
```

Цифровой поиск: *вставка – вспомогательные функции*

```
struct record *make_record (char *key, int value) {
  struct record *r = malloc (sizeof (struct record));
  r->key = strdup (key);
  r->value = value;
  return r;
}

struct tree *make_word (char *key, int value) {
  struct tree *t = malloc (sizeof (struct tree));
  t->tag = word;
  t->r = make_record (key, value);
  return t;
}

struct tree *make_node (void) {
  struct tree *t = calloc (1, sizeof (struct tree));
  t->tag = node;
  return t;
}

struct tree *make_from_record (struct record *r) {
  struct tree *t = malloc (sizeof (struct tree));
  t->tag = word;
  t->r = r;
  return t;
}
```

Цифровой поиск: *вставка элемента*

```
struct tree *insert (struct tree *t, char *key, int value) {
  if (!t)
    return make_word (key, value);

  int i = 0;
  struct tree *root = t;

  /* skip all nodes */
  while (t->tag == node) {
    struct tree **p = &t->nodes[ord(key[i++])];
    if (!*p) {
      *p = make_word (key, value);
      return root;
    }
    t = *p;
  }

  /* all word skipped -- key exists, update value */
  if (i && !key[i - 1]) {
    t->r->value = value;
    return root;
  }
```

Цифровой поиск: *вставка элемента*

```
/* compare the remaining part */
int j = i;
for (; key[i]; i++)
  if (key[i] != t->r->key[i])
    break;

/* key already exists -- update value */
if (!key[i] && !t->r->key[i]) {
  t->r->value = value;
  return root;
}

/* turn t into a node */
struct record *other = t->r;
t->tag = node;
memset (t->nodes, 0, sizeof (t->nodes));
```

Цифровой поиск: *вставка элемента*

```
 /* make new nodes for remaining common prefix */
  for (; j < i; j++) {
    struct tree *p = make_node ();
    t->nodes[ord(key[j])] = p;
    t = p;
  }

  /* accommodate both other and new record */
  t->nodes[ord(other->key[i])]
    = make_from_record (other);
  t->nodes[ord(key[i])] = make_word (key, value);
  return root;
}
```

Цифровой поиск: *печать элементов*

```
void print (struct tree *t, char c) {
  static int level = 0;
  if (!t) {
    printf ("empty\n");
    return;
  }
  for (int i = 0; i < level; i++)
    putchar (' ');
  if (level)
    printf ("%c: ", chr (c));
  if (t->tag == word) {
    printf ("word: %s %d\n", t->r->key, t->r->value);
  } else {
    printf ("node: ");
    for (int i = 0; i < M + 1; i++)
      if (t->nodes[i])
        printf ("%c ", chr(i));
    putchar ('\n');
    level++;
    for (int i = 0; i < M + 1; i++)
      if (t->nodes[i])
        print (t->nodes[i], i);
    level--;
  }
}
```