Курс «Алгоритмы и алгоритмические языки»
1 семестр 2018/2019

Лекция 23

Красно-черные деревья

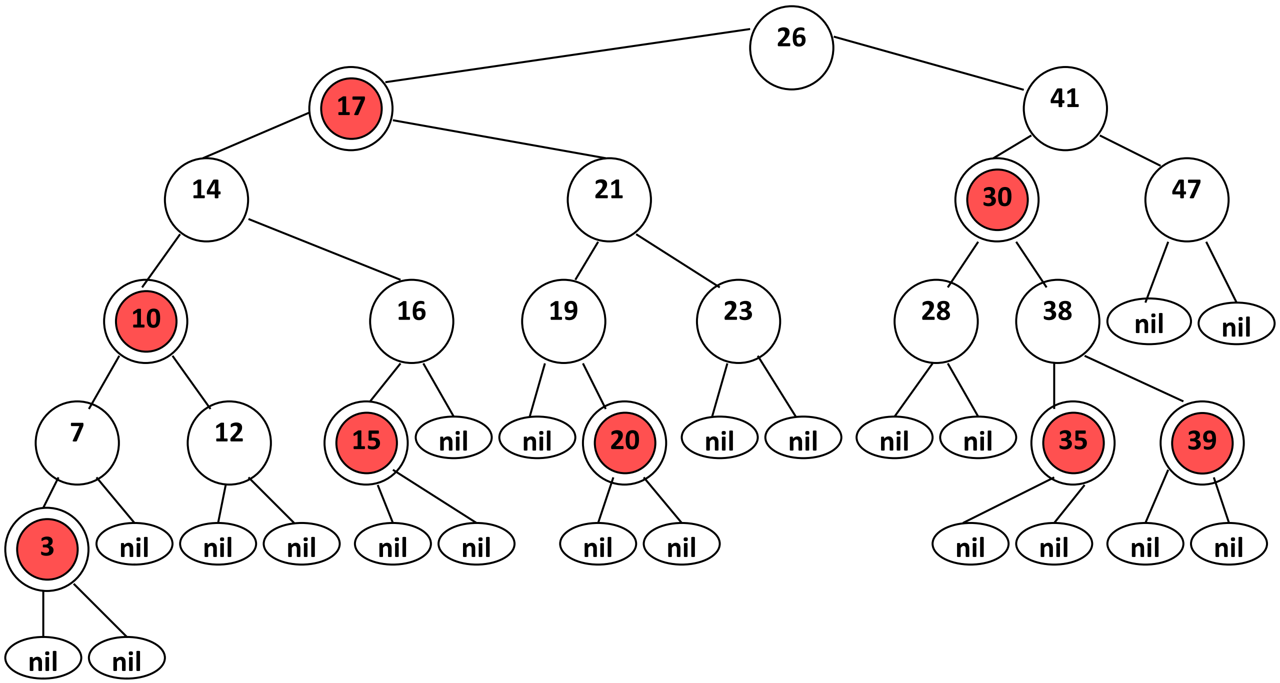
- Красно-черное дерево – двоичное дерево поиска, каждая вершина которого окрашена либо в красный, либо в черный цвет
- Поля – цвет, дети, родители

```
typedef struct rbtree {
  int key;
  char color;
  struct rbtree *left, *right, *parent;
} rbtree, *prbtree;
```

- Будем считать, что если **`left`** или **`right`** равны **`NULL`**, то это “указатели” на фиктивные листы, т.е. все вершины внутренние

Красно-черные деревья

- Свойства красно-черных деревьев:
  1. Каждая вершина либо красная, либо черная.
  2. Каждый лист (фиктивный) – черный.
  3. Если вершина красная, то оба ее сына – черные.
  4. Все пути, идущие от корня к любому листу, содержат одинаковое количество черных вершин



Красно-черные деревья

- Обозначим $bh(x)$ – "черную" высоту поддерева с корнем x (саму вершину в число не включаем), т.е. количество черных вершин от x до листа
- Черная высота дерева – черная высота его корня
- *Лемма*: Красно-черное дерево с n внутренними вершинами (без фиктивных листьев) имеет высоту не более $2\log_2(n+1)$.

  (1) Покажем вначале, что поддерево x содержит не меньше $2^{bh(x)} - 1$ внутренних вершин

  (1а) Индукция. Для листьев $bh = 0$, т.е. $2^{bh(x)} - 1 = 2^0 - 1 = 0$.

  (1б) Пусть теперь x – не лист и имеет черную высоту k. Тогда каждый сын x имеет черную высоту не меньше $k - 1$ (красный сын имеет высоту k, черный – $k - 1$).

  (1в) По предположению индукции каждый сын имеет не меньше $2^{k-1} - 1$ вершин. Поэтому поддерево x имеет не меньше $2^{k-1} - 1 + 2^{k-1} - 1 + 1 = 2^k - 1$.

Красно-черные деревья

- *Лемма*: Красно-черное дерево с n внутренними вершинами (без фиктивных листьев) имеет высоту не более $2log_2(n+1)$.

  (2) Теперь пусть высота дерева равна h.

  (2а) По свойству 3 черные вершины составляют не меньше половины всех вершин на пути от корня к листу. Поэтому черная высота дерева bh не меньше $h/2$.

  (2б) Тогда $n \geq 2^{h/2} - 1$ и $h \leq 2log_2(n + 1)$. Лемма доказана.

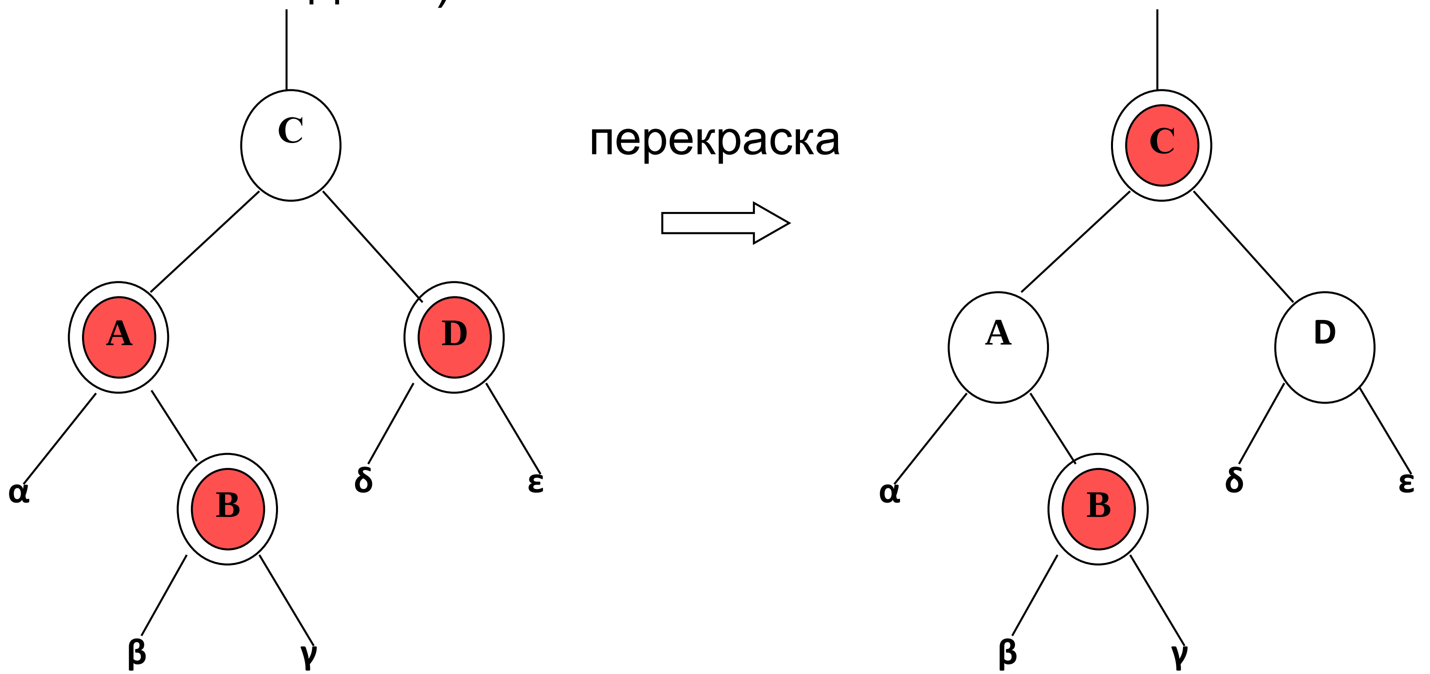
- Следовательно, поиск по красно-черному дереву имеет сложность $O(log_2 n)$.

Красно-черные деревья: вставка вершины

- Сначала мы используем обычную процедуру занесения новой вершины в двоичное дерево поиска:
  - красим новую вершину в красный цвет.
- Если дерево было пустым, то красим новый корень в черный цвет
- Свойство 4 при вставке изначально не нарушено, т.к. новая вершина красная
- Если родитель новой вершины черный (новая – красная), то свойство 3 также не нарушено
- Иначе (родитель красный) свойство 3 нарушено

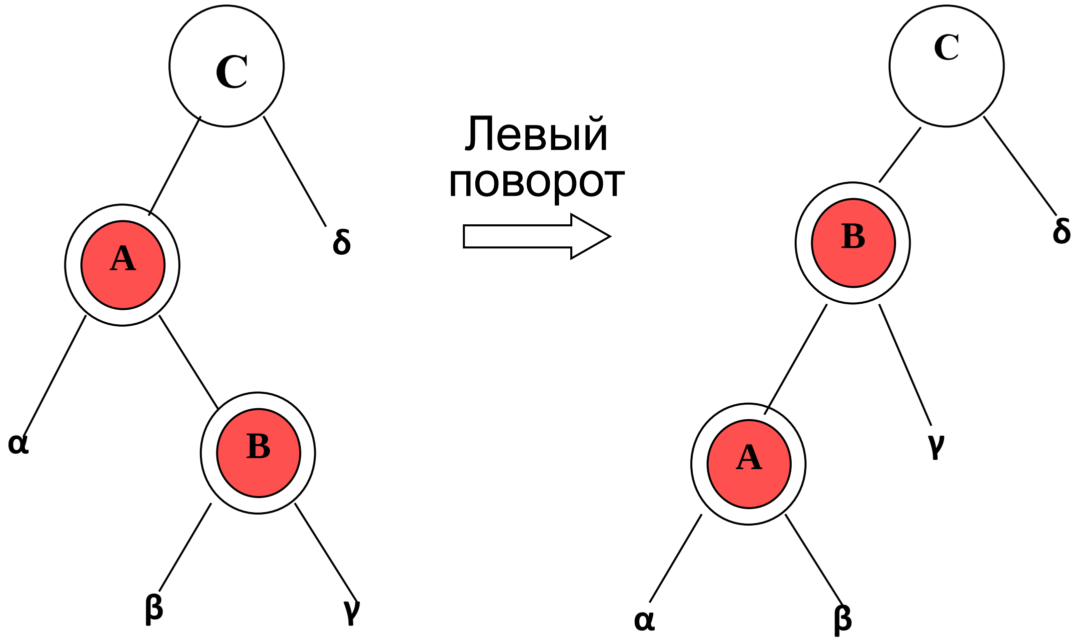
Красно-черные деревья: вставка вершины

- Случай 1: “дядя” (второй сын родителя родителя текущей вершины) тоже красный (как текущая вершина и родитель)
  - Возможно выполнить перекраску:
    родителя и дядю (вершины A и D) – в черный цвет,
    деда – (вершина C) – в красный цвет
  - Свойство 4 не нарушено (черные высоты поддеревьев совпадают)



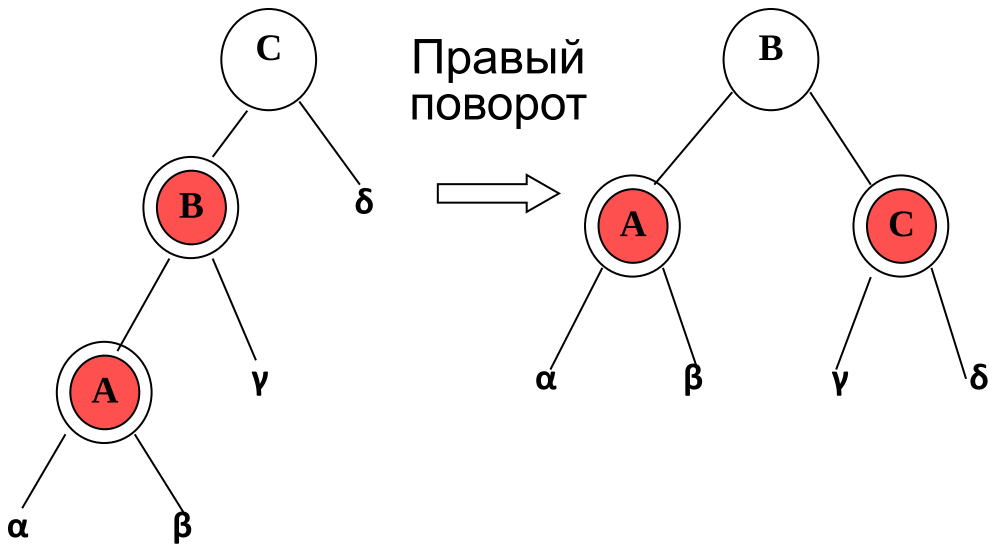
Красно-черные деревья: вставка вершины

- Случай 2: “дядя” (второй сын родителя родителя текущей вершины) черный
  - Шаг 1: Необходимо выполнить левый поворот родителя текущей вершины (вершины A)



Красно-черные деревья: вставка вершины

- Случай 2: “дядя” (второй сын родителя родителя текущей вершины) черный
  - Шаг 2: Необходимо выполнить правый поворот вершины C, после чего …
  - Шаг 3: … перекрасить вершины B и C
  - Все поддеревья имеют черные корни и одинаковую черную высоту, поэтому свойства 3 и 4 верны



Самоперестраивающиеся деревья (splay trees)

- Двоичное дерево поиска, не содержащее дополнительных служебных полей в структуре данных (нет баланса, цвета и т.п.)
- Гарантируется не логарифмическая сложность в худшем случае, а *амортизированная* логарифмическая сложность:
  - Любая последовательность из m словарных операций (поиска, вставки, удаления) над n элементами, *начиная с пустого дерева*, имеет сложность $O(m \log n)$
  - Средняя сложность одной операции $O(\log n)$
  - Некоторые операции могут иметь сложность $\Theta(n)$
  - Не делается предположений о распределении вероятностей ключей дерева и словарных операций (т.е. что некоторые операции выполнялись чаще других)
- Хорошее описание в:

  Harry R. Lewis, Larry Denenberg. Data Structures and Their Algorithms. HarperCollins, 1991. Глава 7.3.

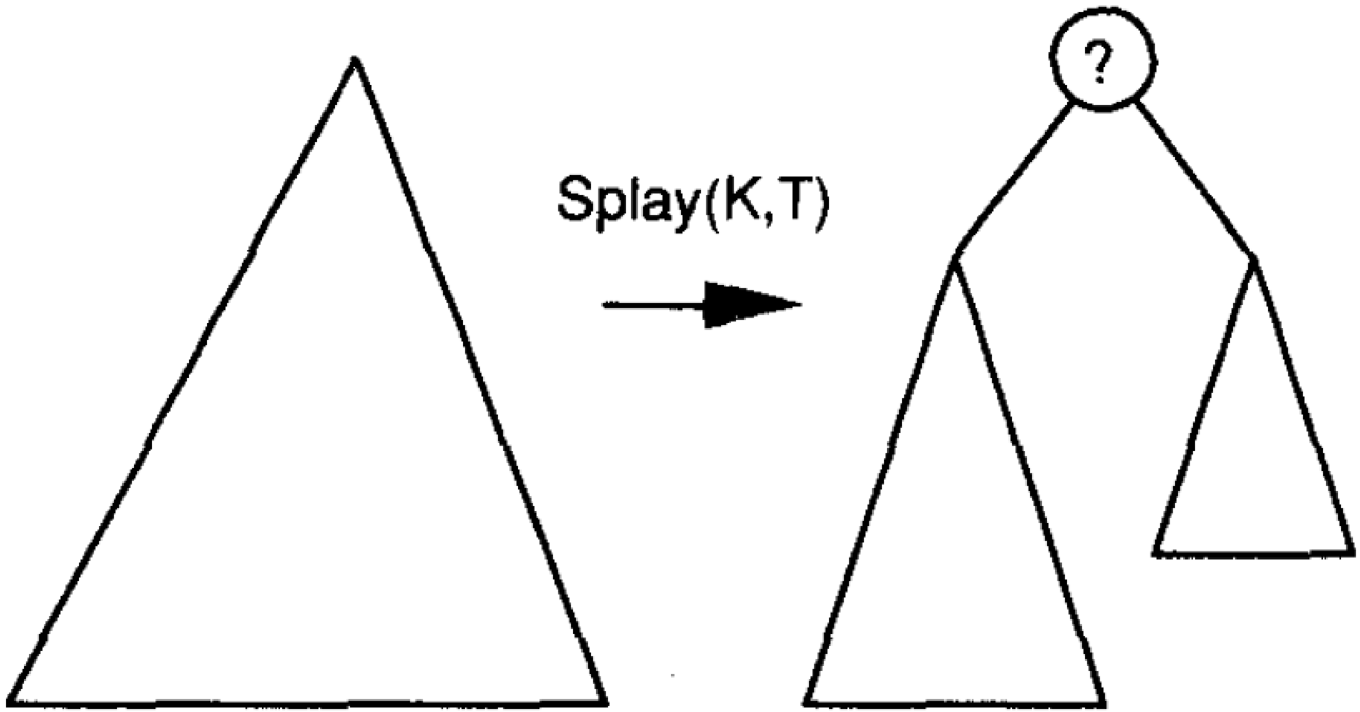
  http://www.amazon.com/Structures-Their-Algorithms-Harry-Lewis/dp/067339736X

Самоперестраивающиеся деревья (splay trees)

- Идея: эвристика Move-to-Front
  - Список: давайте при поиске элемента в списке перемещать найденный элемент в начало списка
  - Если он потребуется снова в обозримом будущем, он найдется быстрее
- Move-to-Front для двоичного дерева поиска: операция $Splay(K, T)$ (подравнивание, перемешивание, расширение)
  - После выполнения операции $Splay$ дерево T перестраивается (оставаясь деревом поиска) так, что:
  - Если ключ K есть в дереве, то он становится корнем
  - Если ключа K нет в дереве, то в корне оказывается его предшественник или последователь в симметричном порядке обхода

Реализация словарных операций через splay

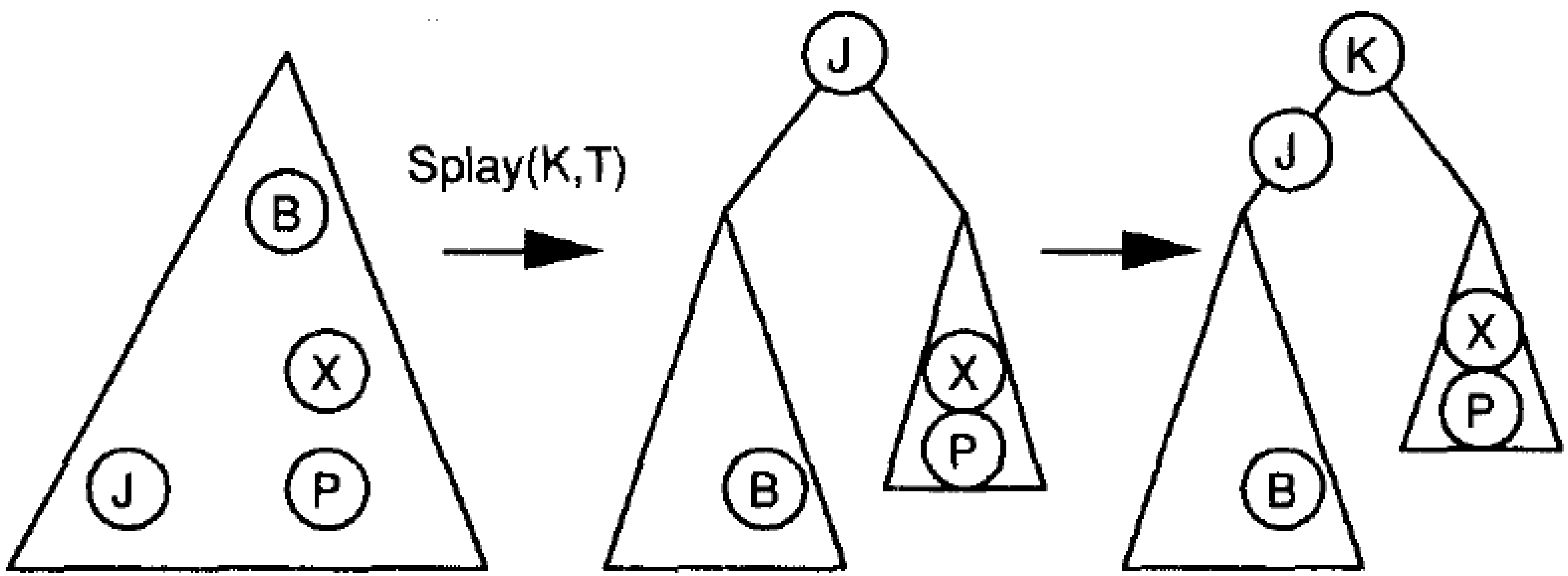
- Поиск (LookUp): выполним операцию $Splay(K, T)$ и проверим значение ключа в корне:
  - если значение равно K, то ключ найден



Реализация словарных операций через splay

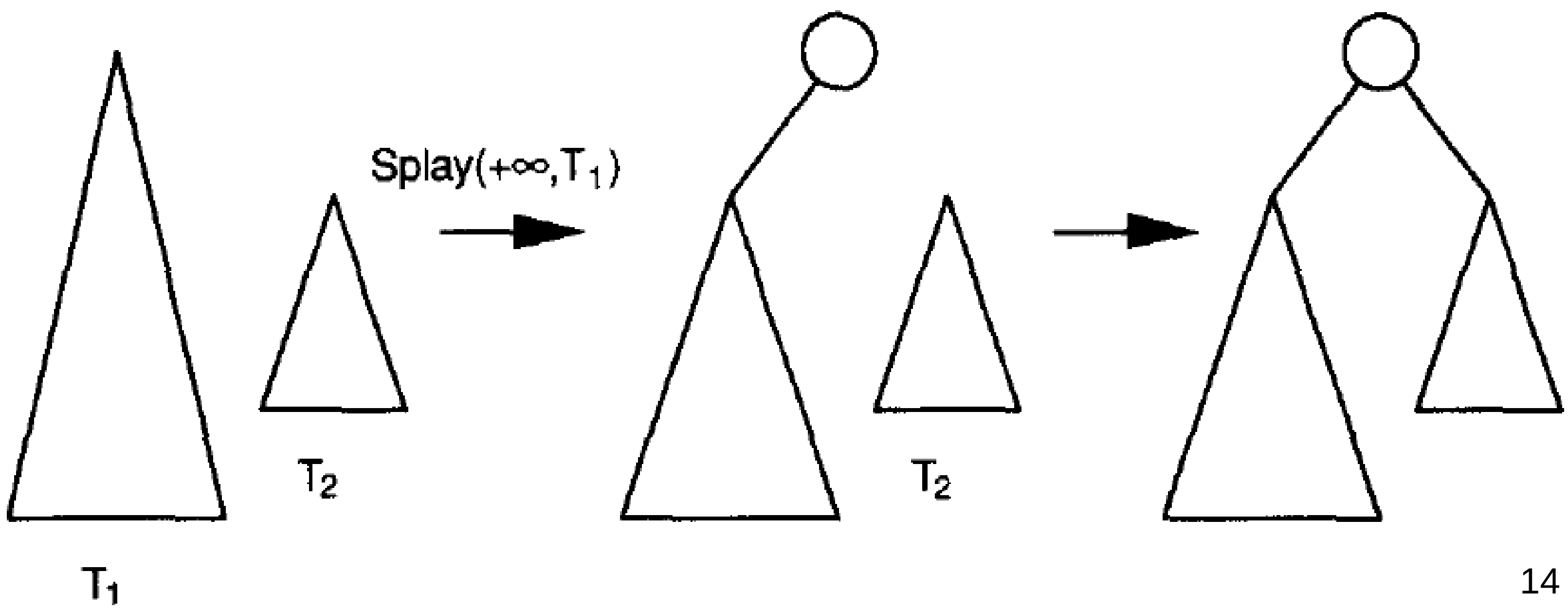
- Вставка (Insert): выполним операцию $Splay(K, T)$ и проверим значение ключа в корне:
  - если значение уже равно K, то обновим данные ключа
  - если значение другое, то вставим новый корень K и поместим старый корень J слева или справа

    (в зависимости от значения J)



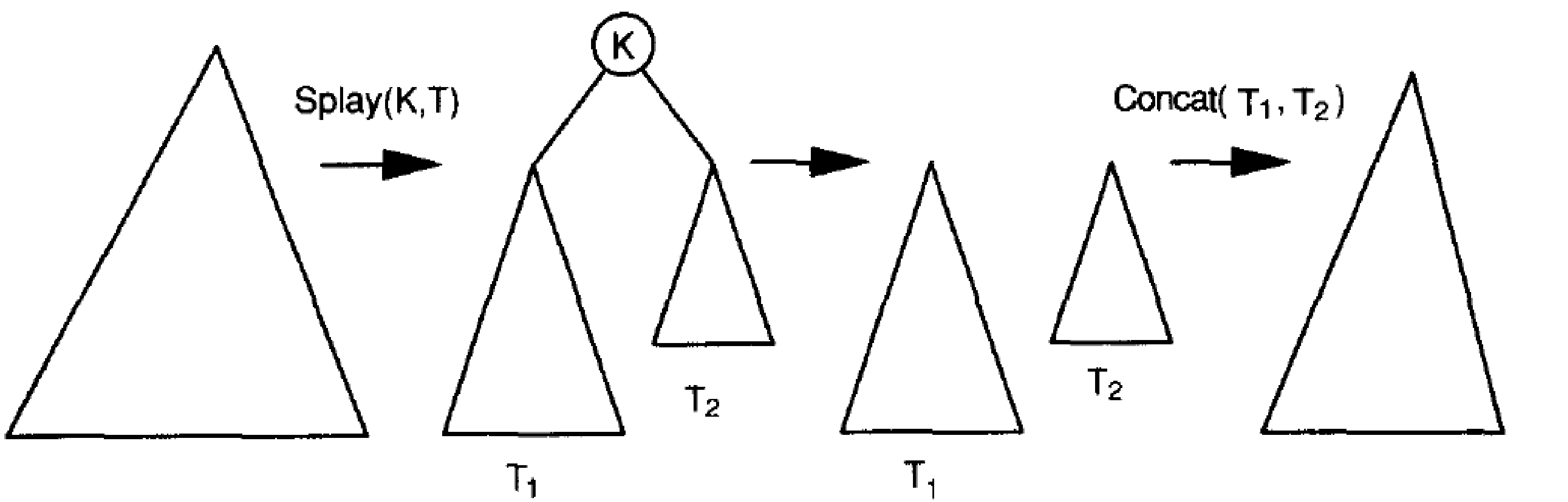
Реализация словарных операций через splay

- Операция *Concat* (T_1, T_2) – слияние деревьев поиска T_1 и T_2 таких, что **все** ключи в дереве T_1 **меньше**, чем **все** ключи в дереве T_2, в одно дерево поиска
- Слияние (Concat): выполним операцию *Splay*($+\infty$, T_1) со значением ключа, заведомо больше любого другого в T_1
  - После *Splay*($+\infty$, T_1) у корня дерева T_1 нет правого сына
  - Присоединим дерево T_2 как правый сын корня T_1



Реализация словарных операций через splay

- Удаление (Delete): выполним операцию $Splay(K, T)$ и проверим значение ключа в корне:
  - если значение **не равно** K, то ключа в дереве нет и удалять нам нечего
  - иначе (ключ был найден) выполним операцию $Concat$ над левым и правым сыновьями корня, а корень удалим

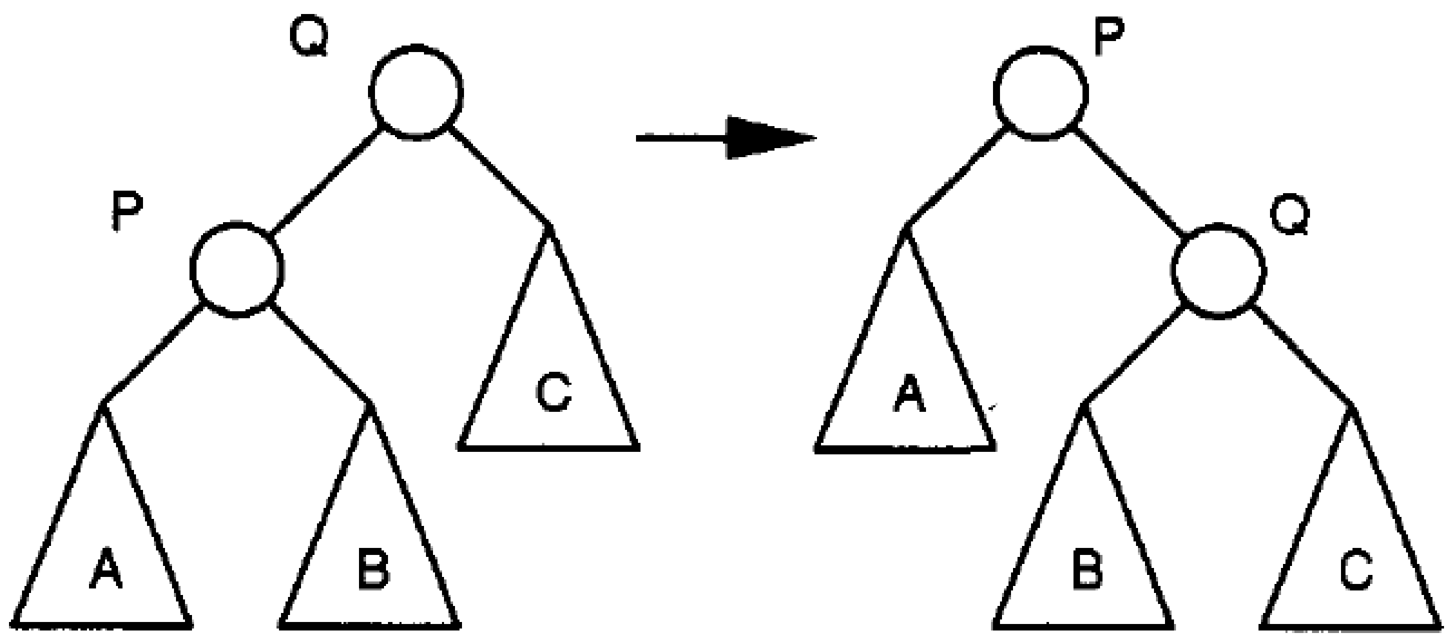


Реализация операции splay

- Шаг 1: ищем ключ K в дереве обычным способом, запоминая пройденный путь по дереву
  - Может потребоваться память, линейная от количества узлов дерева
  - Для уменьшения количества памяти можно воспользоваться *инверсией ссылок* (link inversion)
    - перенаправление указателей на сына назад на родителя вдоль пути по дереву плюс 1 бит на обозначение направления
- Шаг 2: получаем указатель P на узел дерева либо с ключом K, либо с его соседом в симметричном порядке обхода, на котором закончился поиск (сосед имеет единственного сына)
- Шаг 3: возвращаемся назад вдоль запомненного пути, перемещая узел P к корню (узел P будет новым корнем)

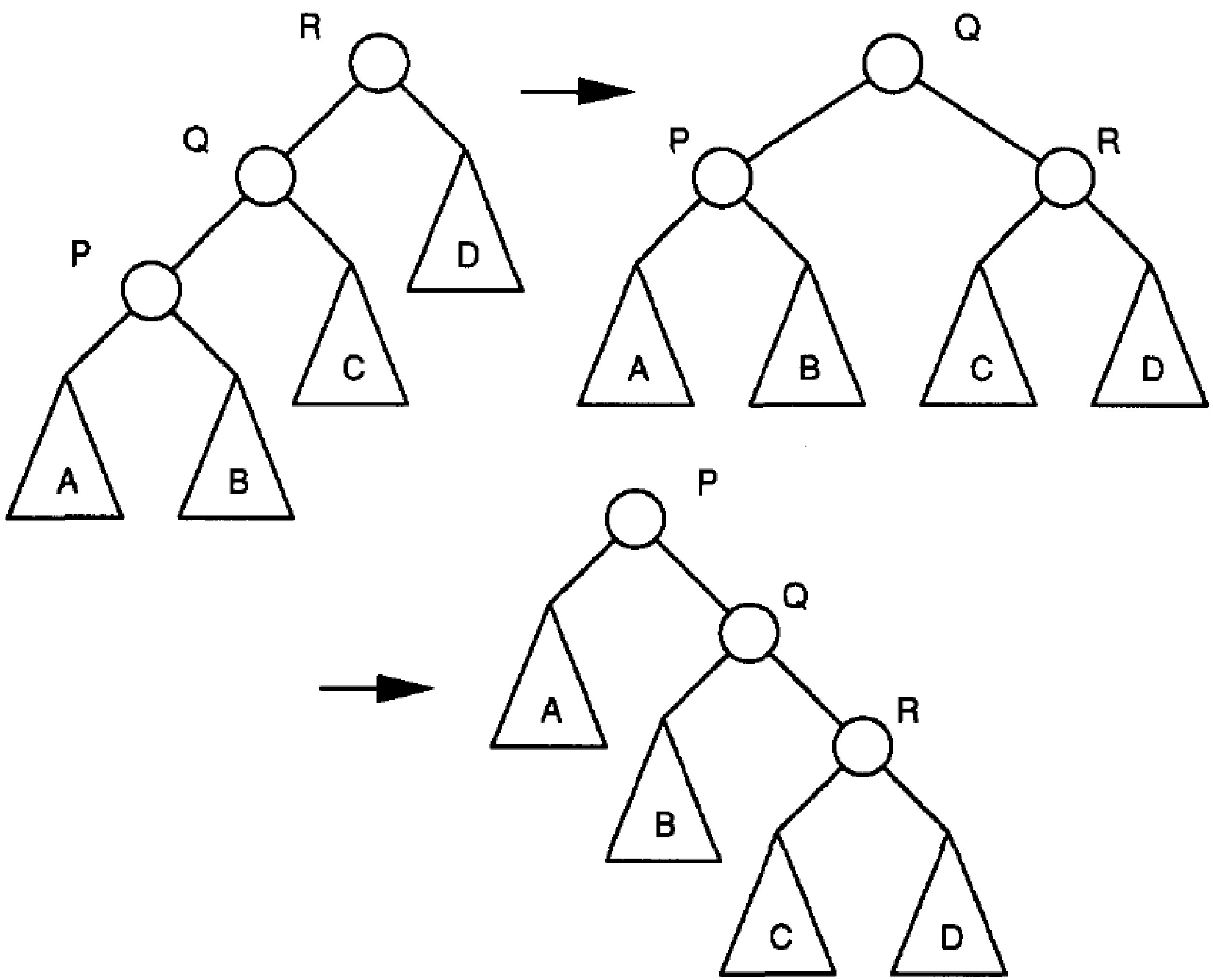
Реализация операции splay

- Шаг 3а): отец узла P – корень дерева (или у P нет деда)
  - выполняем однократный поворот налево или направо



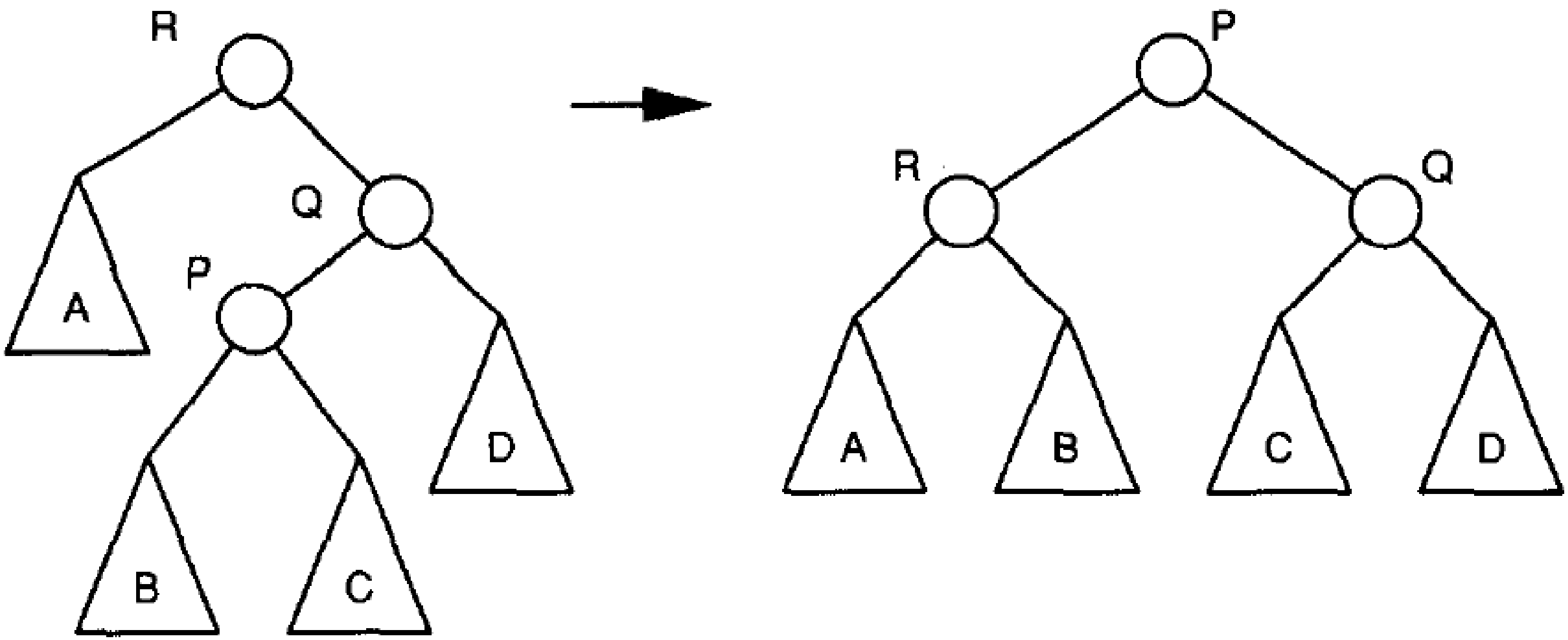
Реализация операции splay

- Шаг 3б): узел P и отец узла P – оба левые или правые дети
  - выполняем два однократных поворота направо (налево), сначала вокруг деда P, потом вокруг отца P



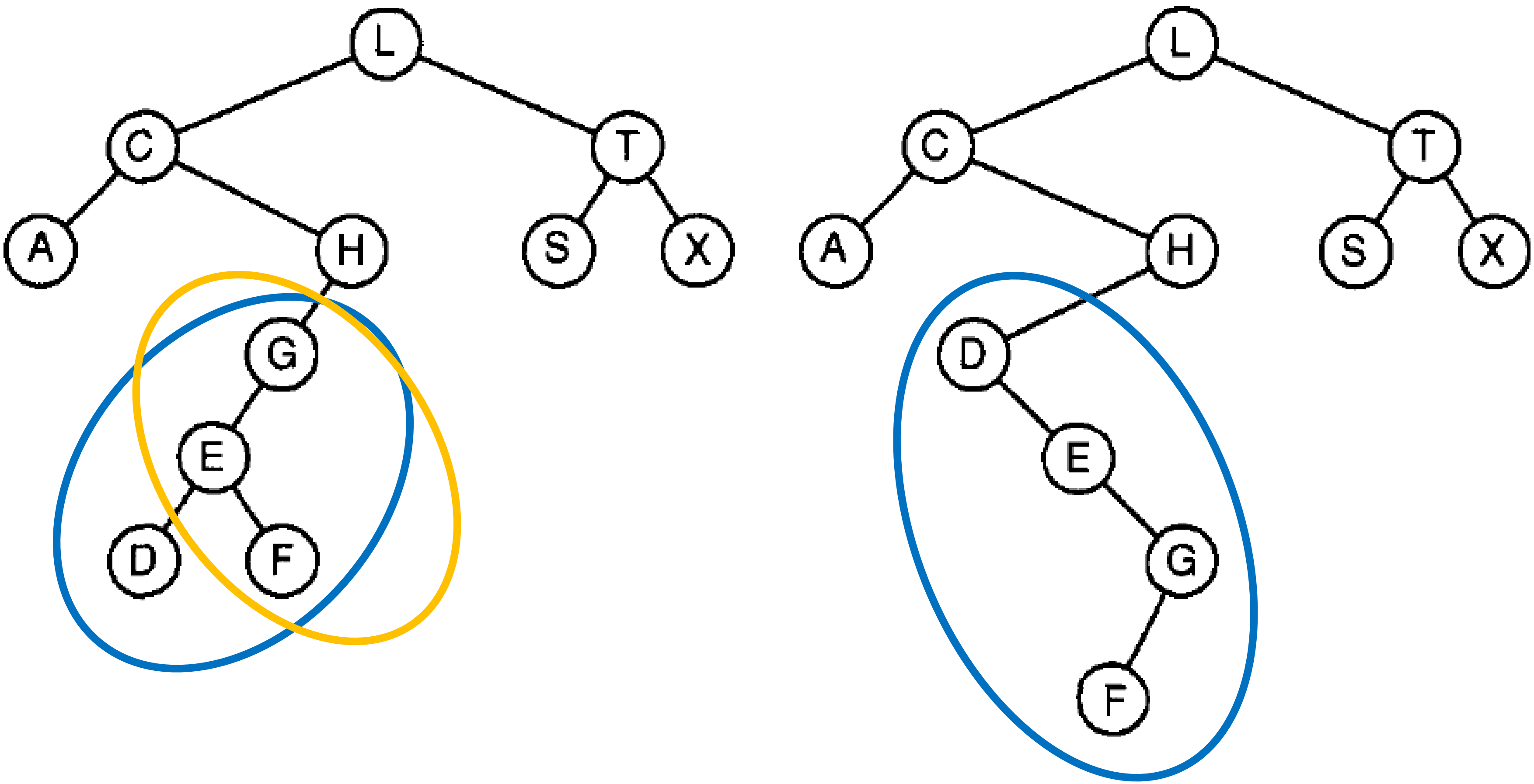
Реализация операции splay

- Шаг 3в): отец узла P – правый сын, а P – левый сын (или наоборот)
  - выполняем два однократных поворота в противоположных направлениях (сначала вокруг отца P направо, потом вокруг деда P налево)



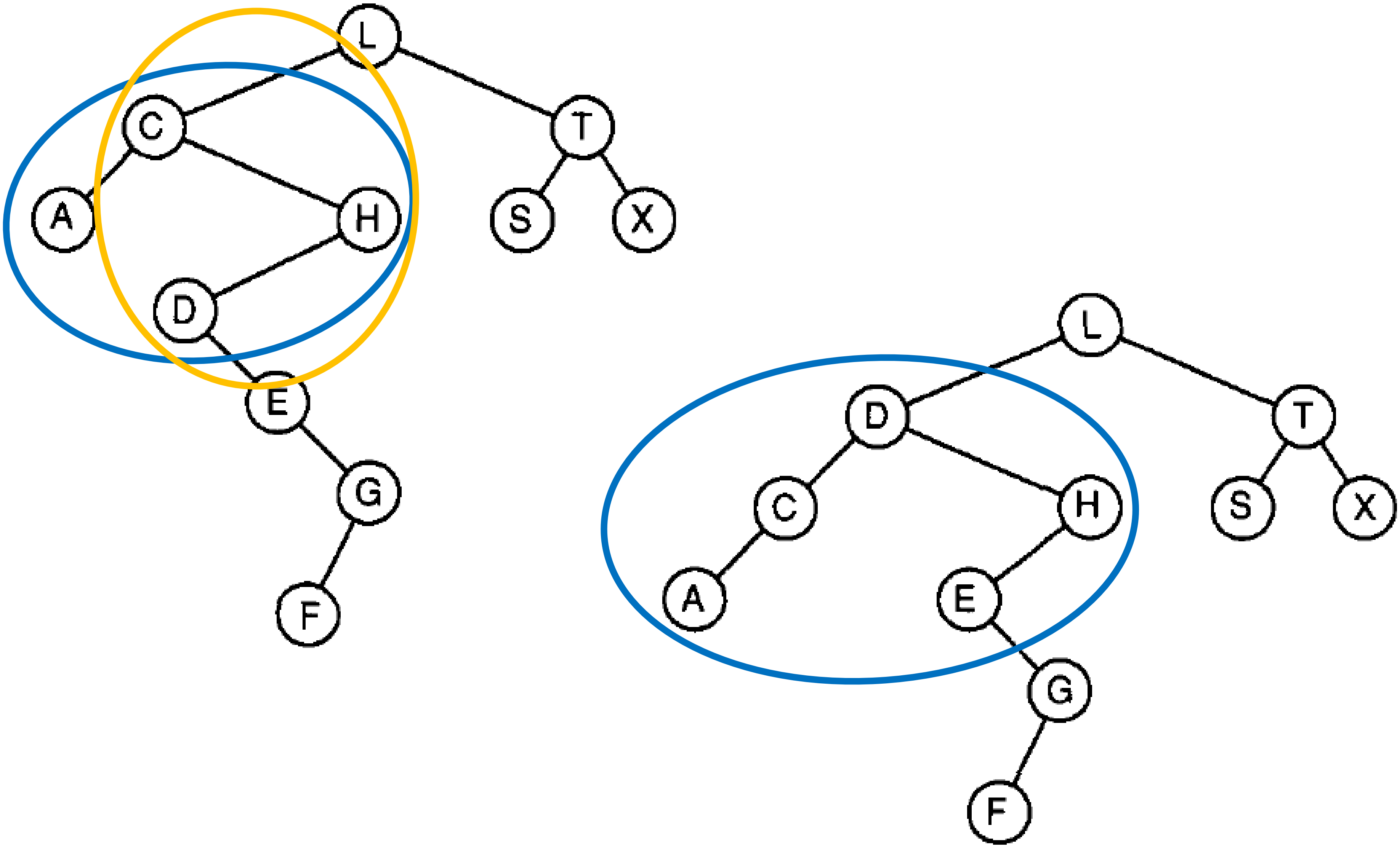
Пример операции splay над узлом D

- Случай б): отец узла D (E) и сам узел D – оба левые сыновья



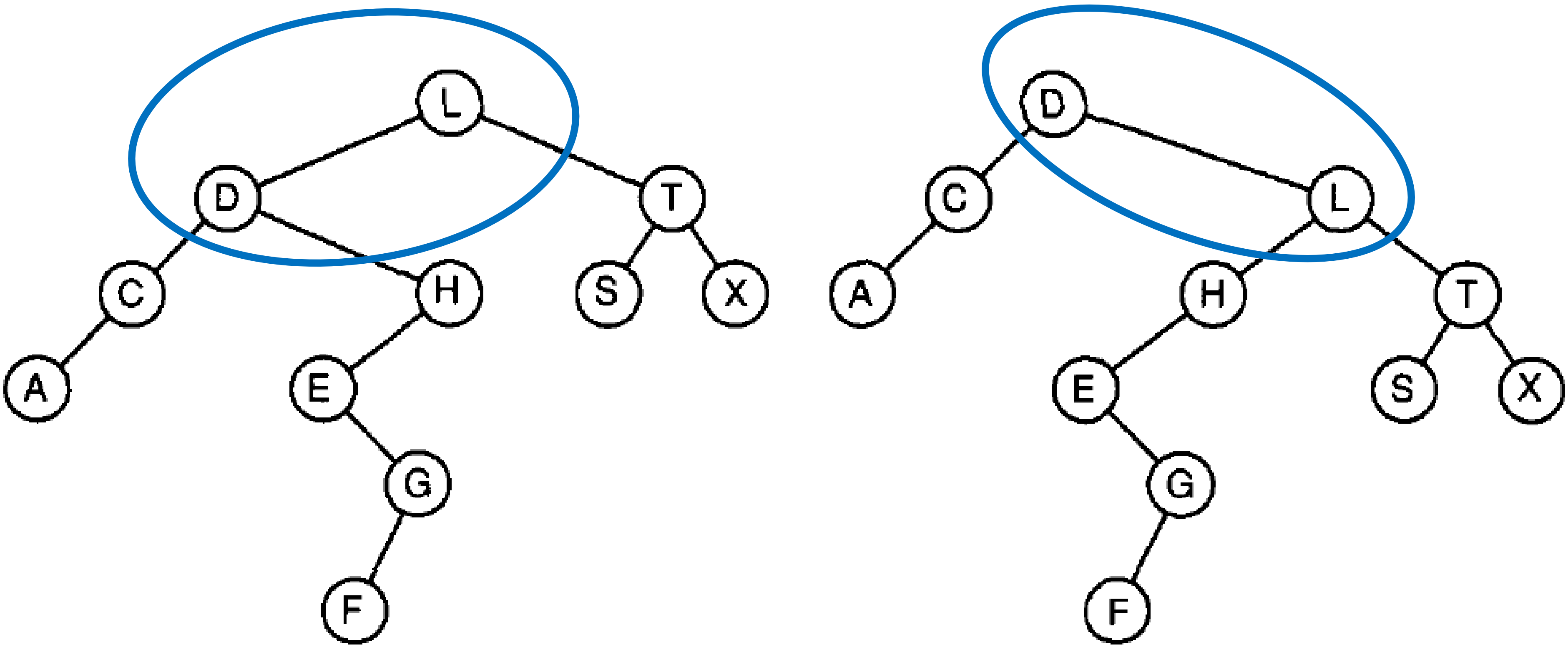
Пример операции splay над узлом D

- Случай в): отец узла D (H) – правый сын, а сам узел D – левый сын



Пример операции splay над узлом D

- Случай а): отец узла D (L) – корень дерева



Сложность операции splay

- Пусть каждый узел дерева содержит некоторую сумму денег.
  - *Весом* узла является количество ее потомков, включая сам узел
  - *Рангом* узла $r(N)$ называется логарифм ее веса
  - *Денежный инвариант*: во время всех операций с деревом каждый узел содержит $r(N)$ рублей
  - Каждая операция с деревом стоит фиксированную сумму за единицу времени
- Лемма. Операция $splay$ требует *инвестирования* не более чем в $3\lfloor \lg n \rfloor + 1$ рублей с **сохранением** денежного инварианта.
- Теорема. Любая последовательность из m словарных операций на самоперестраивающемся дереве, которое было изначально пусто и на каждом шаге содержало не более n узлов, занимает не более $O(m \log n)$ времени.
  - Каждая операция требует не более $O(\log n)$ инвестиций, при этом может использовать деньги узла
  - По лемме инвестируется всего не более $m(3\lfloor \lg n \rfloor + 1)$ рублей, сначала дерево содержит 0 рублей, в конце содержит ≥0 рублей – $O(m \log n)$ хватает на все операции.

Сбалансированные деревья: *обобщение через ранги*

- Haeupler, Sen, Tarjan. Rank-balanced trees. ACM Transactions on Algorithms, 2015.

- Обобщение разных видов сбалансированных деревьев через понятие ранга (rank) и ранговой разницы (rank difference)
  - АВЛ, красно-черные деревья, 2-3 деревья, B-деревья

- Новый вид деревьев: слабые АВЛ-деревья (weak AVL)

- Анализ слабых АВЛ-деревьев, анализ потенциалов

Сбалансированные деревья: *понятие ранга*

- Ранг (rank) вершины r(x): неотрицательное целое число
  - Ранг отсутствующей (null) вершины равен -1

- Ранг дерева: ранг корня дерева

- Ранговая разница (rank difference): если у вершины x есть родитель p(x), то это число r(p(x)) – r(x).
  - У корня дерева нет ранговой разницы

- *i*-сын: вершина с ранговой разницей, равной i.

- *i*,*j*-вершина: вершина, у которой левый сын – это *i*-сын, а правый сын – это *j*-сын. Один или оба сына могут отсутствовать. *i*,*j*- и *j*,*i*-вершины не различаются.

Сбалансированные деревья: *ранговый формализм*

- Конкретный вид сбалансированного дерева определяется *рангом* и *ранговым правилом*.

- Ранговое правило должно гарантировать:
  - Высота дерева (h) превосходит его ранг не более чем в константное количество раз (плюс, возможно, O(1))
  - Ранг вершины (k) превосходит *логарифм* ее размера (n) не более чем в константное количество раз (плюс, возможно, O(1))

    Размер вершины – число ее потомков, включая себя, т.е. размер поддерева с корнем в этой вершине
  - Т.е. $h = O(k)$, $k = O(\log n)$ → $h = O(\log n)$

- Совершенное дерево:

  ранг дерева – его высота; все вершины – 1,1.

Сбалансированные деревья: *ранговые правила*

- *АВЛ*-правило: каждая вершина – 1,1 или 1,2.
  - Ранг: высота дерева.

  (или: все ранги положительны, каждая вершина имеет хотя бы одного 1-сына)
  - Можно хранить один бит, указывающий на ранговую разницу вершины
- *Красно-черное* правило: ранговая разница любой вершины равна 0 или 1, при этом родитель 0-сына не может быть 0-сыном.
  - 0-сын – красная вершина, 1-сын – черная вершина
  - Ранг: черная высота
  - Корень не имеет цвета (т.к. не имеет ранговой разницы!)
- *Слабое* АВЛ-правило: ранговая разница любой вершины равна 1 или 2; все листья имеют ранг 0.
  - Вдобавок к АВЛ-деревьям разрешаются 2,2-вершины
  - Бит на узел для ранговой разницы или ее *четности*
  - Балансировка: не более двух поворотов и O(log n) изменений ранга для вставки/удаления, при этом амортизированно – лишь O(1) изменений.
  - Слабое АВЛ-дерево является красно-черным деревом