Курс «Алгоритмы и алгоритмические языки»
1 семестр 2018/2019

Лекция 22

Деревья Фибоначчи

- ***Определение*** дерева Фибоначчи
  (это тоже искусственное дерево).

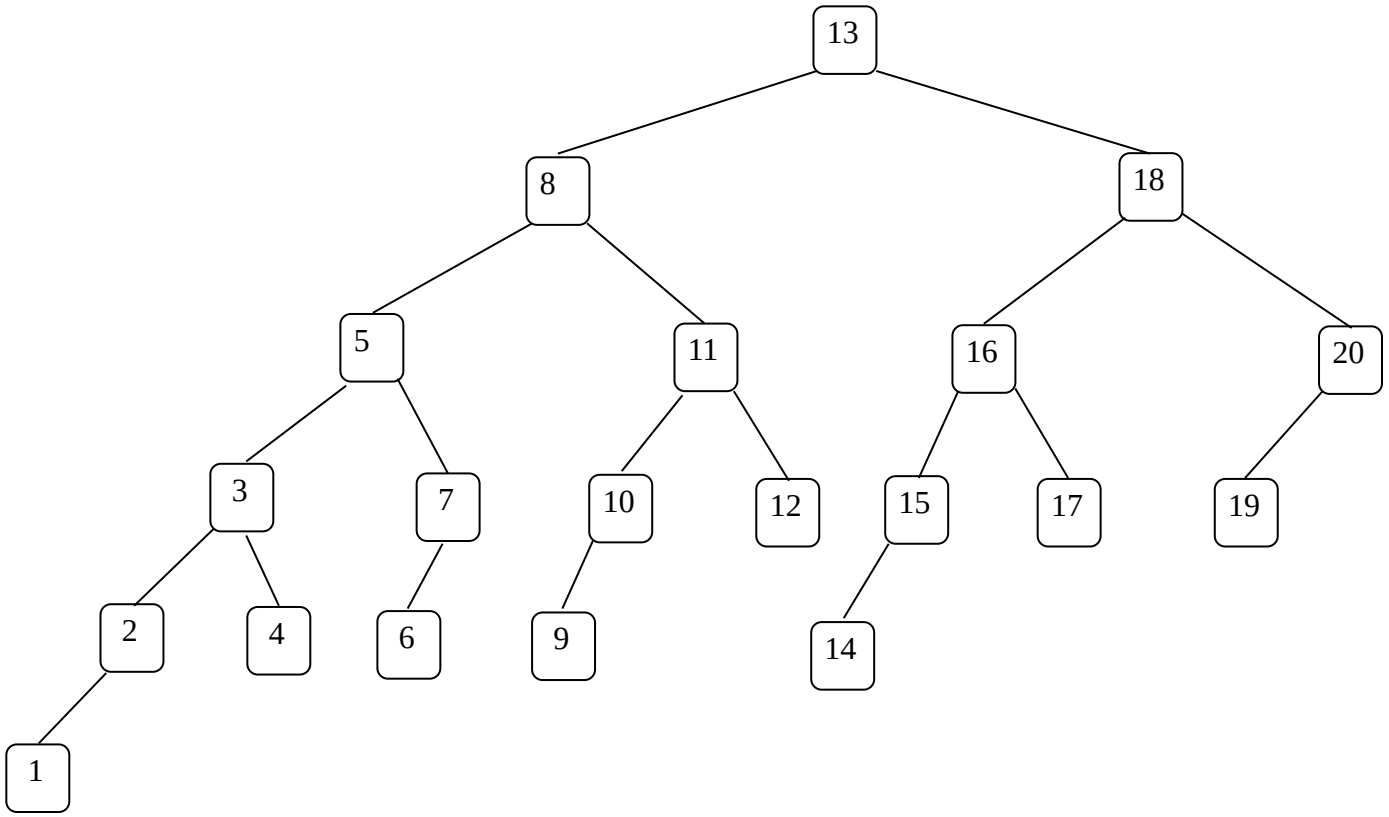
  (1) Пустое дерево – это дерево Фибоначчи с высотой $h = 0$.

  (2) Двоичное дерево, левое и правое поддерево которого есть деревья Фибоначчи с высотами соответственно $h-1$ и $h-2$ (либо $h-2$ и $h-1$), есть дерево Фибоначчи с высотой h.

Из определения следует, что в дереве Фибоначчи значения высот левого и правого поддерева отличаются ровно на 1.

Деревья Фибоначчи

- ***Пример***. Дерево Фибоначчи с $h = 6$.



Деревья Фибоначчи

- ***Теорема 1***. Число вершин в дереве Фибоначчи F_h высоты h равно $m(h) = f_{h+2} - 1$.

Доказательство (по индукции).

$h = 0$: $m(0) = f_2 - 1 = 0$

$m(1) = f_3 - 1 = 1$.

Шаг: по определению $m(h) = m(h-1) + m(h-2) + 1$.

Имеем $m(h) = (f_{h+1} - 1) + (f_h - 1) + 1 = f_{h+2} - 1$,

так как $f_h + f_{h+1} = f_{h+2}$

Деревья Фибоначчи

◈ ***Теорема 2***. Пусть C_1 и C_2 таковы, что уравнение

$$r^2 - C_1 r - C_2 = 0 \qquad (*)$$

имеет два различных корня r_1 и r_2, $r_1 \neq r_2$.

Тогда для $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$

выполняется соотношение $a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2}$.

Доказательство. r_1 и r_2 – корни уравнения (*),

то $r_1^2 = C_1 r_1 + C_2$

$r_2^2 = C_1 r_2 + C_2$.

Имеем:

$$C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} = C_1(\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + C_2(\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}) =$$
$$= \alpha_1 r_1^{n-2}(C_1 r_1 + C_2) + \alpha_2 r_2^{n-2}(C_1 r_2 + C_2) =$$
$$= \alpha_1 r_1^{n-2} r_1^2 + \alpha_2 r_2^{n-2} r_2^2 = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n = a_n \qquad (**)$$

Теорема доказана.

Деревья Фибоначчи

◈ ***Теорема 3***. Пусть C_1 и C_2 таковы, что уравнение

$$r^2 - C_1 r - C_2 = 0 \qquad (*)$$

имеет два корня r_1 и r_2, $r_1 \neq r_2$.
Тогда

из $a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2}$ и начальных условий a_0 и a_1

следует $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ для n = 1, 2, ...

Доказательство. Нужно не только повторить в обратном порядке вывод (**), но и подобрать такие α_1 и α_2, чтобы

$$a_0 = \alpha_1 + \alpha_2,\ a_1 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \qquad (***)$$

Рассматривая (***) как систему линейных уравнений относительно α_1 и α_2, получим:

$$\alpha_1 = \frac{a_1 - a_0 \cdot r_2}{r_1 - r_2}, \qquad \alpha_2 = \frac{-a_1 + a_0 \cdot r_1}{r_1 - r_2}$$

Теорема доказана.

Деревья Фибоначчи

- Применим доказанные теоремы к числам Фибоначчи:

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

Уравнение $r^2 - r - 1 = 0$ имеет корни

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Следовательно, согласно теореме 3

$$f_n = \alpha_1 \cdot r_1^n + \alpha_2 \cdot r_2^n = \alpha_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

$$f_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 0,$$

$$f_1 = \alpha_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \alpha_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Деревья Фибоначчи

Откуда

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Согласно теореме 1

$$m(h) = f_{h+2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{h+2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{h+2} - 1$$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{h+2} \right| < 1$$

$$m(h) + 1 > \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{h+2}$$

Деревья Фибоначчи

Обозначение $\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$m(h)+1 > \frac{1}{\sqrt{5}}\gamma^{h+2} \qquad (****)$$

Логарифмируя обе части (****) , получаем

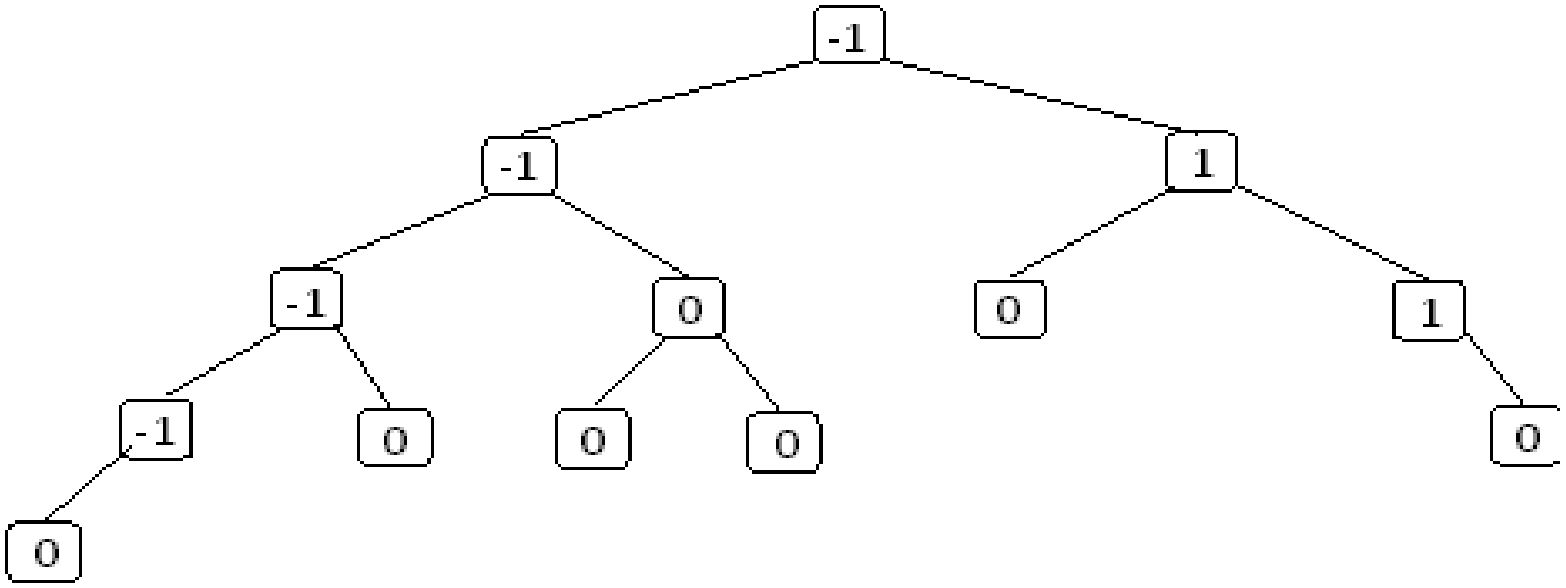
$$h+2 < \frac{\log_2(m+1)}{\log_2 \gamma} + \frac{\log_2 \sqrt{5}}{\log_2 \gamma}$$

откуда $h < 1{,}44 \cdot \log_2(m+1) - 0{,}32$

Таким образом, мы доказали, что для деревьев Фибоначчи с числом вершин m количество сравнений в худшем случае не превышает $1{,}44 \cdot \log_2(m+1) - 0{,}32$

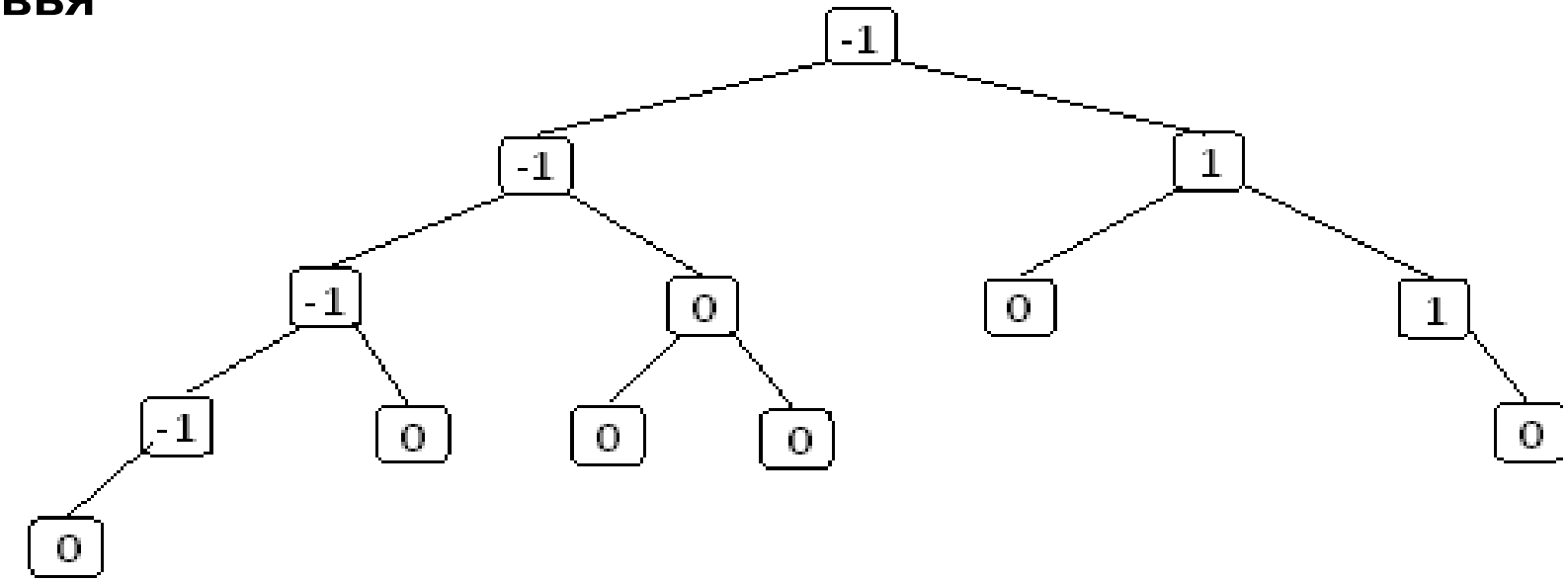
АВЛ-деревья

- В АВЛ-деревьях (Адельсон-Вельский, Ландис) оценка сложности не лучше, чем в совершенном дереве, но не хуже, чем в деревьях Фибоначчи для всех операций: поиск, исключение, занесение.
- *АВЛ-деревом* (подравненным деревом) называется такое двоичное дерево, в котором для любой его вершины высоты левого и правого поддерева отличаются не более, чем на 1.



Пример АВЛ-дерева.

АВЛ-деревья



- В узлах дерева записаны значения *показателя сбалансированности* (*balance factor*), определяемого по формуле:

  $$balance\ factor = height(right\ subtree) - height(left\ subtree)$$

  Показатель сбалансированности может иметь одно из трех значений

  –1: Высота левого поддерева на 1 больше высоты правого поддерева.

  0: Высоты обоих поддеревьев одинаковы.

  +1: Высота правого поддерева на 1 больше высоты левого поддерева.

- У совершенного дерева *все* узлы имеют показатель баланса 0 (это самое «хорошее» АВЛ-дерево) а у дерева Фибоначчи *все* узлы имеют показатель баланса +1 (либо –1) (это самое «плохое» АВЛ-дерево).

АВЛ-деревья

- Типичная структура узла АВЛ-дерева:

```
typedef int key_t;
struct avlnode;
typedef struct avlnode *avltree;
struct avlnode {
  key_t     key;        //ключ
  avltree   left;       //левое поддерево
  avltree   right;      //правое поддерево
  //  int   balance;    показатель баланса
  int       height;     //высота поддерева
};
```

АВЛ-деревья.

- Базовые операции над АВЛ-деревьями.

```
avltree makeempty (avltree t);      //удалить дерево
avltree find (key_t x, avltree t);  //поиск по ключу
avltree findmin (avltree t);        //минимальный ключ
avltree findmax (avltree t);        //максимальный ключ
avltree insert (key_t x, avltree t); //вставить узел
avltree delete (key_t x, avltree t); //исключить узел
```

Реализация простейших базовых операций

- Удалить дерево:

```
avltree makeempty (avltree t) {
  if (t != NULL) {
    makeempty (t->left);
    makeempty (t->right);
    free (t);
  }
  return NULL;
}
```

- Поиск по ключу:

```
avltree find (key_t x, avltree t) {
 if (t == NULL || x == t->key)
   return t;
 if (x < t->key)
   return find (x, t->left);
 if (x > t->key)
   return find (x, t->right);
}
```

Реализация простейших базовых операций

- Минимальный и максимальный ключи:

```
avltree findmin (avltree t) {
  if (t == NULL)
    return NULL;
  else if (t->left == NULL)
    return t;
  else
    return findmin (t->left);
}

avltree findmax (avltree t) {
  if (t != NULL)
    while (t->right != NULL)
      t = t->right;
  return t;
}
```

Включение узла в АВЛ-дерево

- ***Поддержка балансировки АВЛ-дерева при выполнении операции включения ключей***

  Рассматриваемое дерево состоит из корневой вершины r и левого (L) и правого (R) поддеревьев, имеющих высоты h_L и h_R соответственно.

  Для определенности будем считать, что новый ключ включается в поддерево L.

- h_L **не изменяется** $\Rightarrow$ не изменяются соотношения между h_L и h_R $\Rightarrow$ свойства АВЛ-дерева сохраняются.

- h_L **увеличивается на 1** $\Rightarrow$ возможны три случая:

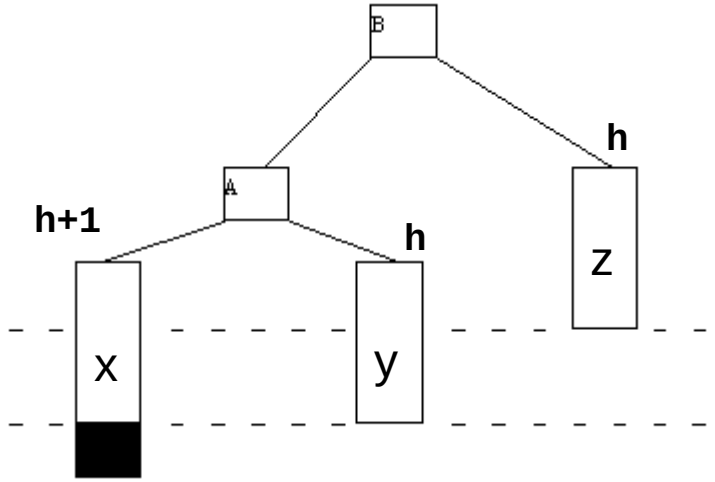
  (1) $h_L = h_R \Rightarrow$ после добавления вершины L и R станут разной высоты, но свойство сбалансированности сохранится

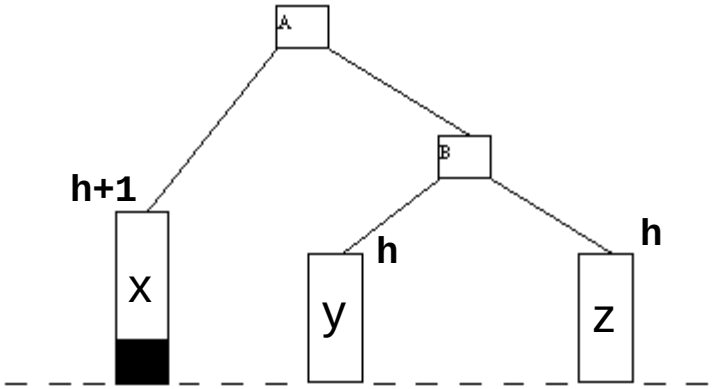
  (2) $h_L < h_R \Rightarrow$ после добавления новой вершины L и R станут равной высоты, т.е. сбалансированность общего дерева даже улучшится

  (3) $h_L > h_R \Rightarrow$ после включения ключа сбалансированность нарушится, и *потребуется перестройка дерева*.

Включение узла в АВЛ-дерево

- (3а) **Новая вершина добавляется к левому поддереву поддерева** L. В результате поддерево с корнем в узле B разбалансировалось: разность высот его левого и правого поддеревьев стала равной –2.



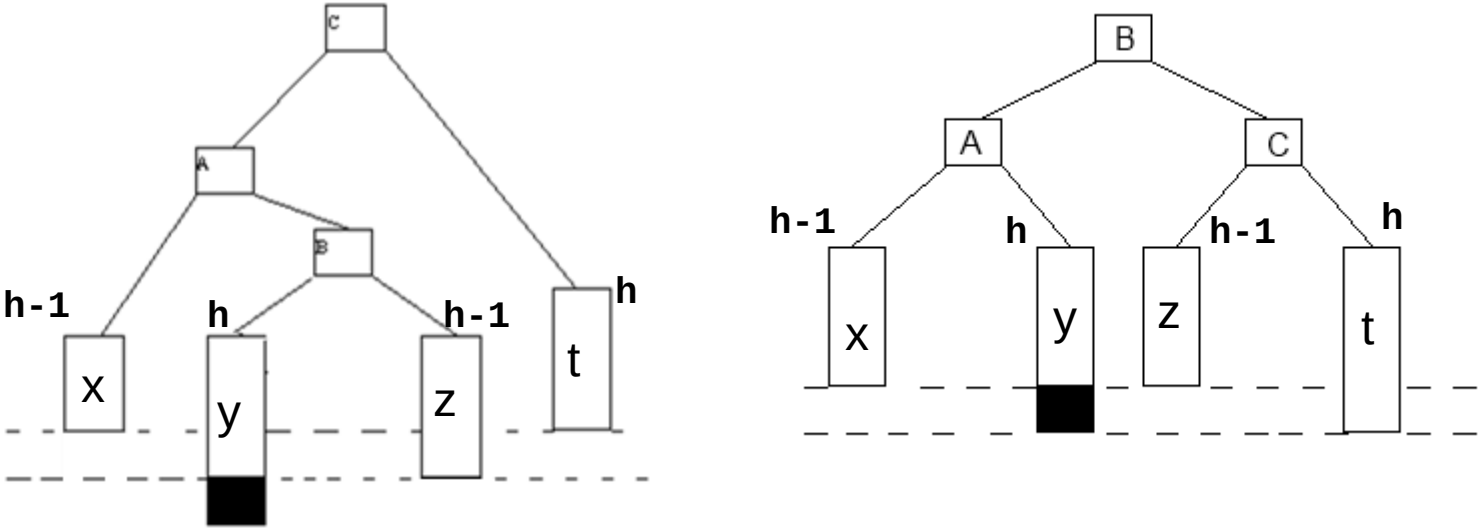


Преобразование, разрешающее ситуацию (3а) (однократный поворот $\boldsymbol{RR}$):

Делаем узел A корневым узлом поддерева, в результате правое поддерева с корнам в узле B «опускается» и разность высот становится равной 0

Включение узла в АВЛ-дерево

- (3b) **Новая вершина добавляется к правому поддереву поддерева** L. В результате поддерево с корнем в C разбалансировалось: разность высот его левого и правого поддеревьев стала равной -2.



Преобразование, разрешающее ситуацию (3b) (двукратный поворот ***LR***):

«Вытягиваем» узел B на самый верх, чтобы его поддеревья поднялись. Для этого сначала делаем левый поворот, меняя местами поддеревья с корневыми узлами A и B, а потом – правый поворот, меняя местами поддеревья с корневыми узлами B и C.

Построение АВЛ-дерева

- Высота поддерева с корнем в узле P.

```
static inline int height (avltree p) {
  return p ? p->height : 0;
}
```

- Выбор более длинного поддерева

```
static inline int max (int lhs, int rhs) {
  return lhs > rhs ? lhs : rhs;
}
```

Построение АВЛ-дерева

- Однократные повороты
  - Между узлом и его левым сыном

Функция SingleRotateWithLeft вызывается только в том случае, когда у узла К2 есть левый сын. Функция выполняет поворот между узлом (К2) и его левым сыном, корректирует высоты поддеревьев, после чего возвращает новый корень

```
static avltree SingleRotateWithLeft (avltree k2) {
  avltree k1;
  /* выполнение поворота */
  k1 = k2->left;
  k2->left = k1->right;        /* k1 != NULL */
  k1->right = k2;
  /* корректировка высот переставленных узлов */
  k2->height = max (height (k2->left),
                    height (k2->right)) + 1;
  k1->height = max (height (k1->left), k2->height) + 1;
  return k1; /* новый корень */
}
```

Построение АВЛ-дерева

- Однократные повороты
  - Между узлом и его правым сыном

Эта функция вызывается только в том случае, когда у узла K1 есть правый сын. Функция выполняет поворот между узлом (K1) и его правым сыном, корректирует высоты поддеревьев, после чего возвращает новый корень

```
static avltree SingleRotateWithRight (avltree k1) {
  avltree k2;
  k2 = k1->right;
  k1->right = k2->left;
  k2->left = k1;
  k1->height = max (height (k1->left),
                    height (k1->right)) + 1;
  k2->height = max (height (k2->right), k1->height) + 1;
  return k2; /* новый корень */
}
```

Построение АВЛ-дерева

- Двойные повороты
  - *LR*- поворот

Эта функция вызывается только тогда, когда у узла K3 есть левый сын, а у левого сына K3 есть правый сын. Функция выполняет двойной поворот LR, корректирует высоты поддеревьев, после чего возвращает новый корень

```
static avltree DoubleRotateWithLeft (avltree k3) {
  /* Поворот между K1 и K2 */
  k3->left = SingleRotateWithRight (k3->left);
  /* Поворот между K3 и K2 */
  return SingleRotateWithLeft (k3);
}
```

Построение АВЛ-дерева

- Двойные повороты
  - *RL*- поворот

Эта функция вызывается только в том случае, когда у узла K1 есть правый сын, а у правого сына узла K1 есть левый сын. Функция выполняет двойной поворот RL, корректирует высоты поддеревьев, после чего возвращает новый корень

```
static avltree DoubleRotateWithRight (avltree k1){
  /* Поворот между K3 и K2 */
  k1->right = SingleRotateWithLeft (k1->right);
  /* Поворот между K1 и K2 */
  return SingleRotateWithRight(k1);
}
```

Построение АВЛ-дерева

- Вставить новый узел

```
avltree insert (key_t x, avltree t) {
  if (t == NULL) {
    /* создание дерева с одним узлом */
    t = malloc (sizeof (struct avlnode));
    if (!t)
      abort();
    t->key = x;
    t->height = 1;
    t->left = t->right = NULL;
  }
  else if (x < t->key) {
    t->left = insert (x, t->left);
    if (height (t->left) – height (t->right) == 2) {
```

- Вставить новый узел

```
    if (x < t->left->key)
      t = SingleRotateWithLeft (t);
    else
      t = DoubleRotateWithLeft (t);
    }
  }
  else if (x > t->key) {
    t->right = insert (x, t->right);
    if (height (t->right) – height (t->left) == 2) {
      if (x > t->right->key)
        t = SingleRotateWithRight (t);
      else
        t = DoubleRotateWithRight (t);
    }
  }
  /* иначе x уже в дереве */
  t->height = max (height (t->left), height (t->right)) + 1;
  //t->balance = height (t->right) – height (t->left);
  return t;
}
```

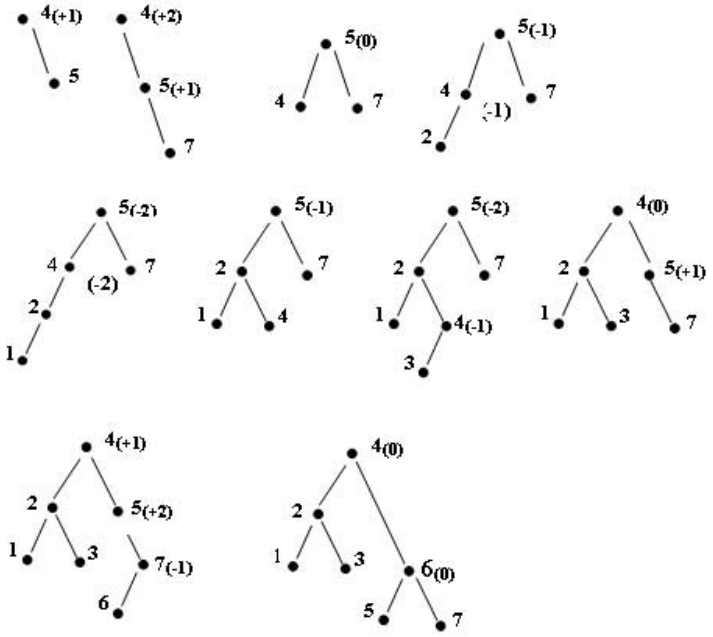
Построение АВЛ-дерева

- ***Пример***

Пусть на «вход» функции **`insert()`** последовательно поступают целые числа 4,5,7,2,1,3,6.

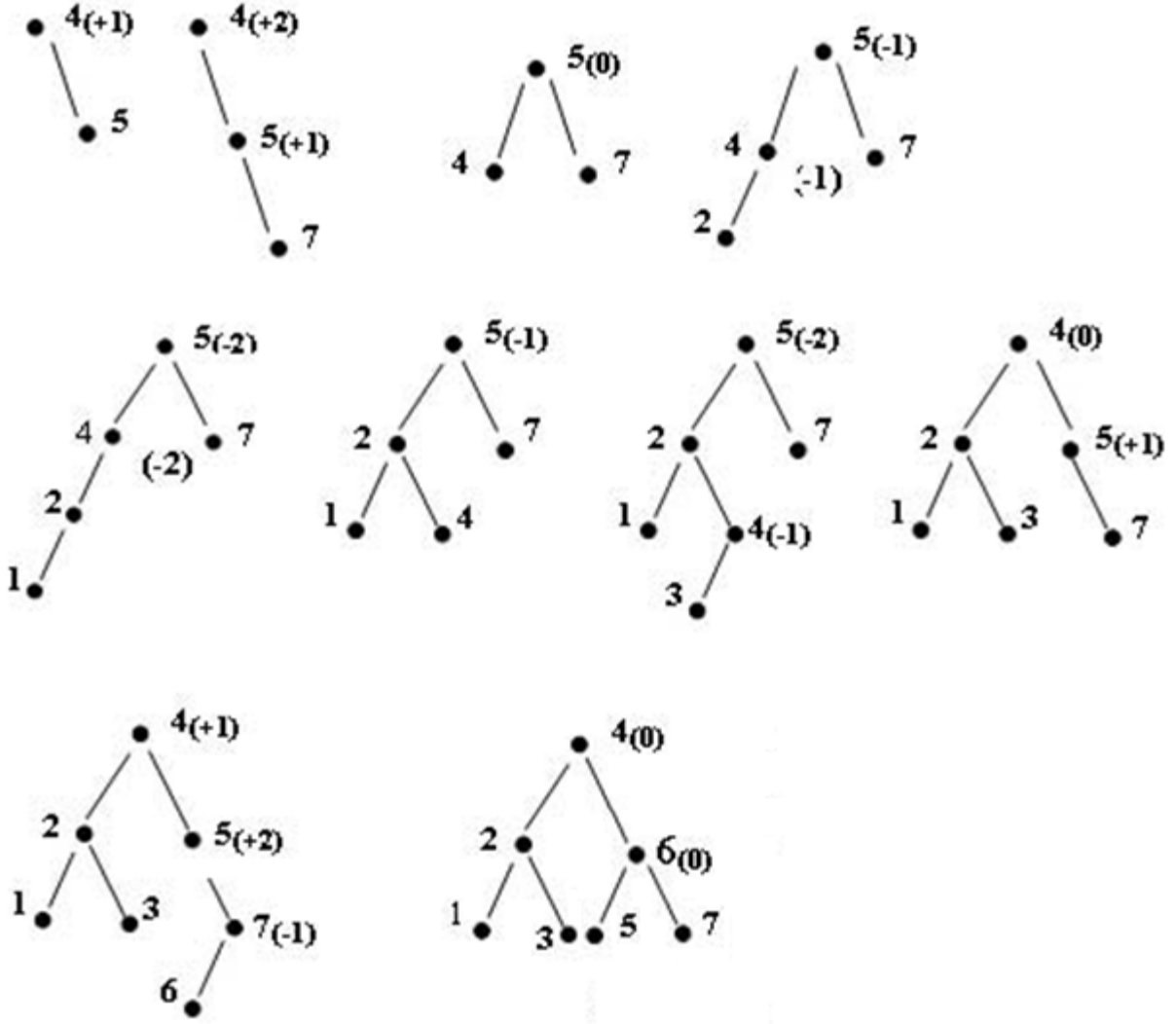
Изобразим процесс «роста» АВЛ-дерева (в скобках для части вершин указан показатель сбалансированности):

Числа в примере подобраны так, чтобы обеспечить как можно больше поворотов при минимальном числе включений.



Построение АВЛ-дерева

- ***Пример построения АВЛ-дерева***



Исключение узла из АВЛ-дерева

- Объявление функции:

```
avltree delete (key_t x, avltree t);
```

- Исключение узла из АВЛ-дерева требует балансировки дерева.

  Иными словами, в конец функции, выполняющей исключение узла, необходимо добавить вызовы функций:
  `SingleRotateWithRight(T)`, **`SingleRotateWithLeft(T)`**, **`DoubleRotateWithRight(T)`** и **`DoubleRotateWithLeft(T)`**

- Возможны случаи вращения, не встречавшиеся при вставке.
- Может оказаться необходимым выполнить несколько вращений.

Оценка сложности

- Ранее были получены оценки высоты

(1) самого «хорошего» АВЛ-дерева, содержащего m узлов (*полностью сбалансированное дерево*)

$$h = O(\log_2(m+1))$$

(2) самого «плохого» АВЛ-дерева, содержащего m узлов (*дерево Фибоначчи*)

$$h \le 1.44 \cdot \log_2(m+1) - 0.32$$

Следовательно, для «среднего» АВЛ-дерева, содержащего m узлов :

$$\log_2(m+1) \le h \le 1.44 \cdot \log_2(m+1) - 0.32$$