Курс «Алгоритмы и алгоритмические языки»
1 семестр 2014/2015

Лекция 9

Вычисления с плавающей точкой

- Предпосылки: дробные двоичные числа
- Стандарт арифметики с плавающей точкой IEEE 754: Определение
- Пример и свойства
- Округление, сложение, умножение
- Плавающие типы языка Си
- Выводы

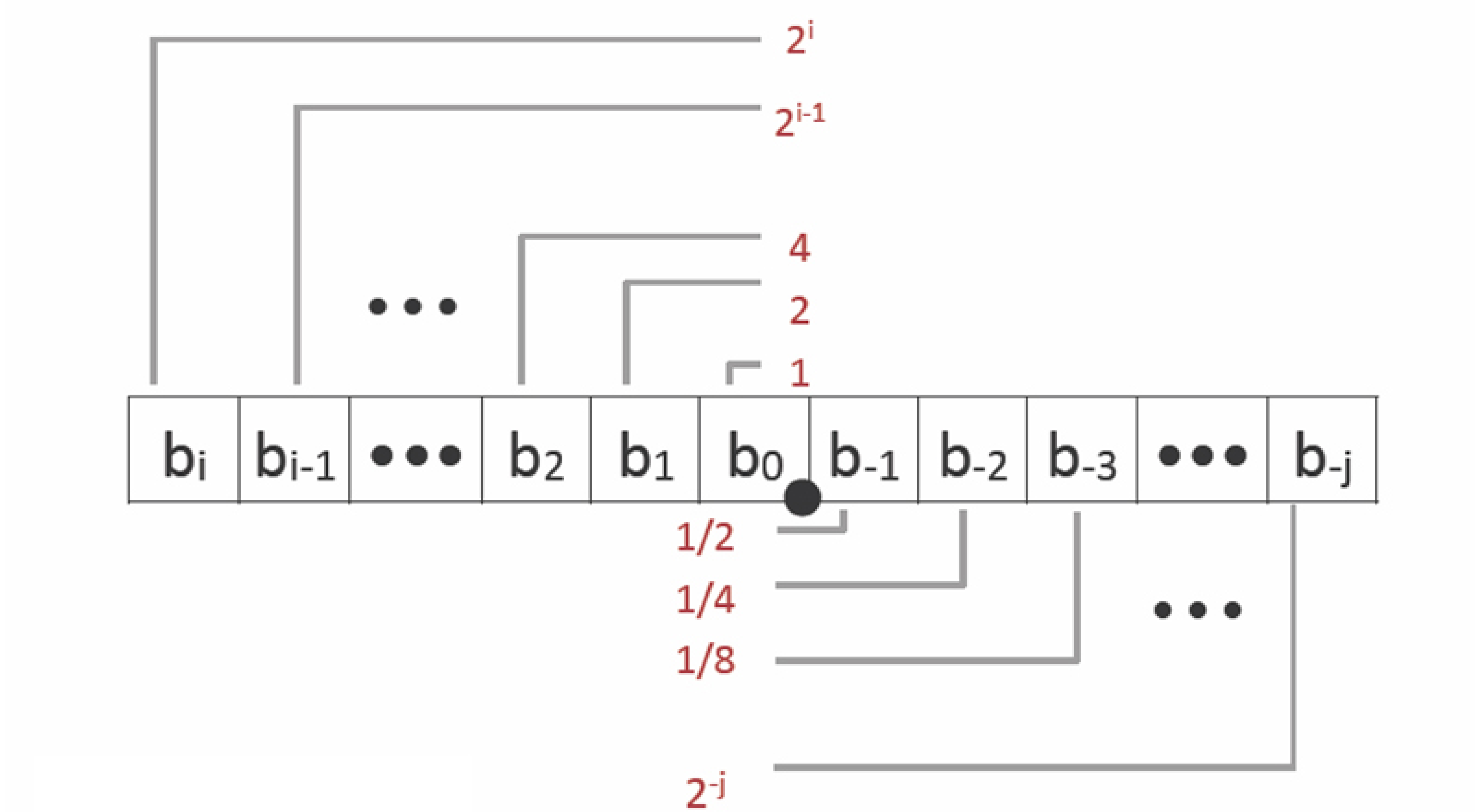
Дробные двоичные числа

- Что такое 1011.101_2 ?

$$1\times 2^3+0\times 2^2+1\times 2^1+1\times 2^0+1\times 2^{-1}+0\times 2^{-2}+1\times 2^{-3}=$$

$$=11\frac{5}{8}=11.625$$

Дробные двоичные числа



- Черное пятнышко – двоичная точка
- Биты слева от точки умножаются на положительные степени 2
- Биты справа от точки умножаются на отрицательные степени 2

Дробные двоичные числа

- $0.111111\ldots_2 = 1.0-\varepsilon\ (\varepsilon \to 0)$, так как

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \ldots + \tfrac{1}{2^n} + \ldots \to 1 \quad \text{при } n \to \infty$$

- Точно можно представить только числа вида $x/2^k$

- Остальные рациональные числа представляются периодическими двоичными дробями:

$$\tfrac{1}{5} = 0.(0011)_2$$

- Иррациональные числа представляются апериодическими двоичными дробями и могут быть представлены только приближенно

Представление чисел с плавающей точкой (IEEE 754)

- Числа с плавающей точкой представляются в нормализованной форме: $(-1^{s})\ M\ 2^{e}$
  - s – код знака числа (он же знак мантиссы)
  - M – мантисса ($1 \le M < 2$)
  - e – (двоичный) порядок

- Первая цифра мантиссы в нормализованном представлении всегда 1. В стандарте принято решение не записывать в представление числа эту единицу (тем самым мантисса как бы увеличивается на разряд).

  Экономия связана с тем, что в представление числа записывается не M, а $frac = M - 1$

Представление чисел с плавающей точкой

- Чтобы не записывать отрицательных чисел в поле порядка, вводится ***смещение*** $bias = 2^{k-1} - 1$, где k – количество бит в поле для записи порядка, и вместо порядка e записывается код порядка exp, связанный с e соотношением $e = exp – bias$.

- Нормализованное число $(-1^{s})\ M\ 2^{e}$ упаковывается в машинное слово (структуру) с полями s, $frac$ и exp

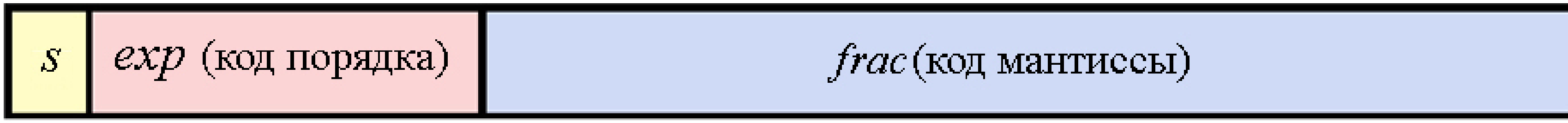
s	exp (код порядка)	$frac$ (код мантиссы)

Ширина поля s всегда равна 1.

Ширина полей exp и $frac$ зависит от точности числа

Представление чисел с плавающей точкой

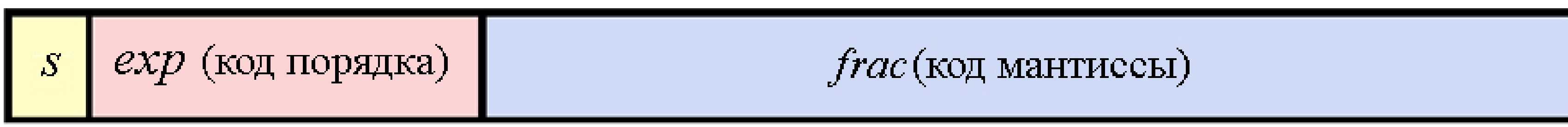
- Одинарная точность (32 бита):



8 бит 23 бита

$bias = 127; \quad -126 \leq e \leq 127\ ; \quad 1 \leq exp \leq 254$

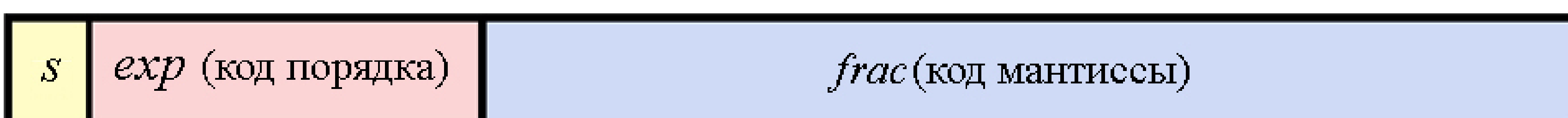
- Двойная точность (64 бита):



11 бит 52 бита

$bias = 1023; \quad -1022 \leq e \leq 1023\ ; \quad 1 \leq exp \leq 2046$

- Повышенная точность (80 бит):



15 бит 64 бита

Представление чисел с плавающей точкой

- Пример
  - **Значение** `float f = 15213.0`

    $$15213_{10} = 11101101101101_2 = 1.1101101101101_2 \times 2^{13}$$

  - **Значащая часть**

    $$M = 1.\underline{1101101101101}_2,$$

    $$frac = \underline{1101101101101}0000000000_2$$

  - **Порядок**

    $$e = 13$$

    $$bias = 127$$

    $$exp = 140 = 10001100_2$$

  - **Результат**

0	10001100	11011011011010000000000
s	exp	frac

Представление нуля

- Для типа **float** код порядка **exp** изменяется от **00000001** до **11111110**
(значению **00000001** соответствует порядок **e = - 126**, значению **11111110** – порядок **e = 127**)

- Код **exp = 00000000, frac = 000…0** представляет нулевое значение; в зависимости от значения знакового разряда **s** это либо **+0** либо **-0**

- А какое значение представляют коды
exp = 00000000, frac ≠ 000…0?
exp = 11111111?

Большие числа

Пусть **`exp = 111…1`**

- если при этом **`frac = 000…0`**, то коду будет соответствовать значение ∞ (со знаком **`s`**)
- если же **`frac`** $\neq$ **`000…0`**, то код не будет представлять никакое число («значение», представляемое таким кодом, так и называется: «не число» – **`NaN`** – Not a number)

Денормализованные числа

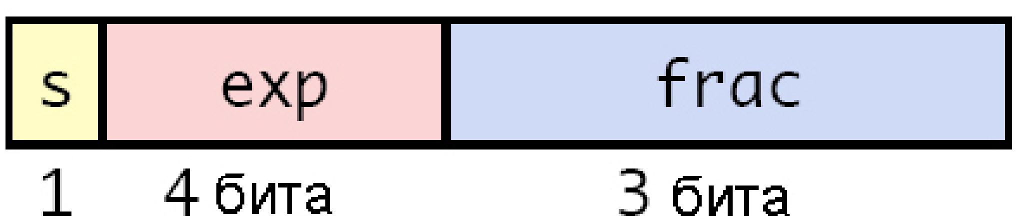
- Это числа, представляемые кодами

  `exp = 00000000, frac` $\neq$ `000…0`

- **`exp`** вносит в значение такого числа постоянный вклад 2^{-k-2},

  `frac` меняется от **`000…01`** до **`111…1`** ***и*** рассматривается уже не как мантисса, а как значение, умножаемое на **`exp`**

- Рассмотрим это на модельном примере:

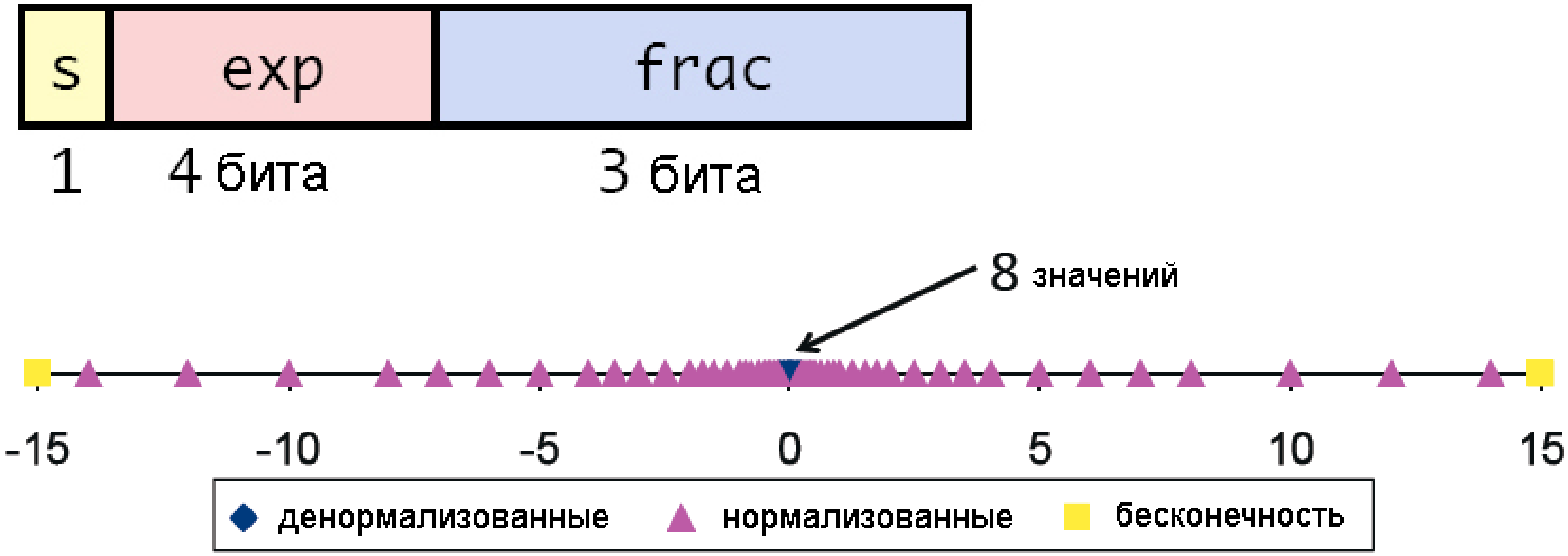


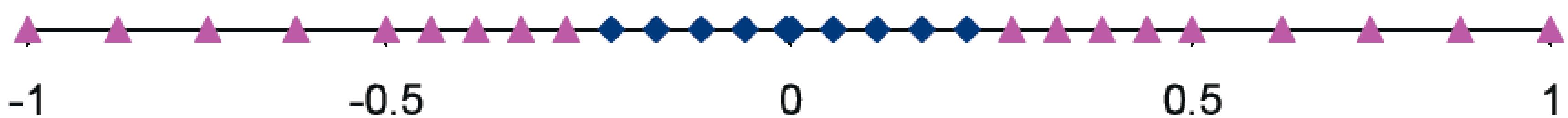
8-разрядные числа с плавающей точкой (положительные)

s	exp	frac
1	4 бита	3 бита

	s	exp	frac	E	Value	
Ненормализованные числа	0	0000	000	-6	0	
	0	0000	001	-6	1/8*1/64 = 1/512	Близкие к 0
	0	0000	010	-6	2/8*1/64 = 2/512	
	...					
	0	0000	110	-6	6/8*1/64 = 6/512	
	0	0000	111	-6	7/8*1/64 = 7/512	Наибольшее ненормализованное
Нормализованные числа	0	0001	000	-6	8/8*1/64 = 8/512	Наименьшее нормализованное
	0	0001	001	-6	9/8*1/64 = 9/512	
	...					
	0	0110	110	-1	14/8*1/2 = 14/16	
	0	0110	111	-1	15/8*1/2 = 15/16	Ближайшее к 1 снизу
	0	0111	000	0	8/8*1 = 1	
	0	0111	001	0	9/8*1 = 9/8	Ближайшее к 1 сверху
	0	0111	010	0	10/8*1 = 10/8	
	...					
	0	1110	110	7	14/8*128 = 224	
	0	1110	111	7	15/8*128 = 240	Наибольшее нормализованное
	0	1111	000	n/a	inf	

8-разрядные числа с плавающей точкой

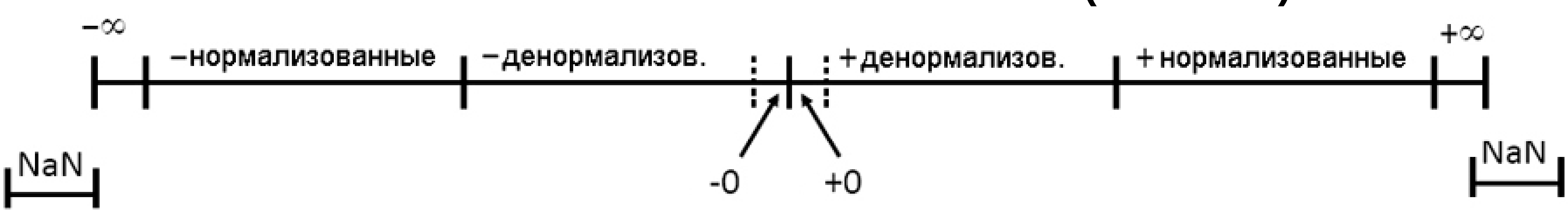




Центральная область более крупно

Важные частные случаи

	exp	frac	Численное значение
◈ Нуль	00…00	00…00	0.0
◈ Наим. положит. денорм.	00…00	00…01	
♦ **float** $\approx 1.4\times10^{-45}$			$2^{-23}\times2^{-126}$
♦ **double** $\approx 4.9\times10^{-324}$			$2^{-52}\times2^{-1022}$
◈ Наиб. положит. денорм.	00…00	11…11	
♦ **float** $\approx 1.18\times10^{-38}$			$(1.0 - \varepsilon)\times2^{-126}$
♦ **double** $\approx 2.2\times10^{-308}$			$(1.0 - \varepsilon)\times2^{-1022}$
◈ Наим. положит. норм.	00…01	00…00	
♦ **float**			1.0×2^{-126}
♦ **double**			1.0×2^{-1022}
◈ Единица	01…11	00…00	1.0
◈ Наиб. положит. норм.			
♦ **float** $\approx 3.4\times10^{38}$			$(2.0 - \varepsilon)\times2^{127}$
♦ **double** $\approx 1.8\times10^{308}$			$(2.0 - \varepsilon)\times2^{1023}$



Операции над числами с плавающей точкой

- $$x +_{FP} y = Round(x + y)$$
  $$x \times_{FP} y = Round(x \times y)$$
  где $Round()$ означает округление

- Выполнение операции
  - Сначала вычисляется точный результат (получается более длинная мантисса, чем запоминаемая, иногда в два раза)
  - Потом фиксируется исключение (например, переполнение)
  - Потом результат округляется, чтобы поместиться в поле $frac$

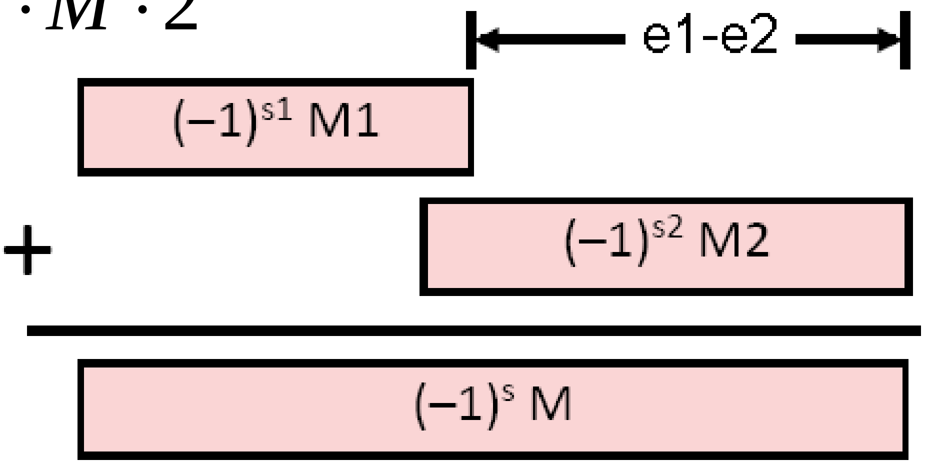
Умножение чисел с плавающей точкой

- $$(-1)^{s1} \cdot M1 \cdot 2^{e1} \times (-1)^{s2} \cdot M2 \cdot 2^{e2}$$
- Точный результат $(-1)^{s} \cdot M \cdot 2^{e}$
  - Знак s — $s1 \wedge s2$
  - Значащие цифры M — $M1 \times M2$
  - Порядок e — $e1 + e2$
- Преобразование
  - Если $M \geq 2$, сдвиг M вправо с одновременным увеличением e
  - Если e не помещается в поле exp, переполнение
  - Округление M, чтобы оно поместилось в поле $frac$
- Основные затраты на перемножение мантисс

Сложение чисел с плавающей точкой

- $$(-1)^{s1}\cdot M1\cdot 2^{e1}+(-1)^{s2}\cdot M2\cdot 2^{e2}$$
  Пусть $e1 > e2$

- Точный результат $(-1)^{s}\cdot M\cdot 2^{e}$
  - Знак s и значащие цифры M вычисляются как показано на рисунке
  - Порядок суммы – $e1$



- Преобразование
  - Если $M \geq 2$, сдвиг M вправо с одновременным увеличением e
  - Если $M < 1$, сдвиг M влево на k позиций с одновременным вычитанием k из e
  - Если e не помещается в поле exp, переполнение
  - Округление M, чтобы оно поместилось в поле $frac$

Плавающие типы языка Си

`float`, `double`, `long double`

- ***Операции над данными с плавающей точкой*.**
  - *Одноместные*: изменение знака («одноместный минус»: **–**), одноместный плюс (**+**).
  - *Двухместные*: сложение (**+**), вычитание (**–**), умножение (*****), деление (**/**).
- ***Порядок выполнения арифметических операций в выражениях (приоритет).***
  - самый низкий приоритет у двуместных **+** и **–**,
  - более высокий приоритет у двуместных ***** и **/**,
  - еще более высокий приоритет у одноместных **+** и **–**.
  - В выражениях без скобок операции с более высоким приоритетом выполняются раньше.
  - Скобки позволяют изменить порядок выполнения операций.

Пример 1. Вычисление суммы 5 чисел типа **`float`**

(мантисса – 6 десятичных цифр, порядок – 2 десятичных цифры):

$0.231876*10^{02} + 0.645391*10^{-03} + 0.231834*10^{-01} + 0.245383*10^{-02} + 0.945722*10^{-03} =$

a) $\mathbf{0.231876*10^{02} + 0.645391*10^{-03} + 0.231834*10^{-01} + 0.245383*10^{-02} + 0.945722*10^{-03} = 0.2321\underline{\mathit{4}}7*10^{02}}$**;**

$23.1876 + 0.000645391 = 23.188245391 = 23.1882 = 0.\ 231882*10^{02}$;

$23.1882 + 0.0231834 = 23.2113834 = 23.2114 = 0.232114*10^{02}$;

$23.2114 + 0.00245383 = 23.21385383 = 23.2138*10^{02}$;

$23.\ 2138 + 0.000945722 = 23.214745722 = 23.2147 = 0.232147*10^{02}$;

b) $\mathbf{0.645391*10^{-03} + 0.9457*10^{-03} + 0.245383*10^{-02} + 0.231834*10^{-01} + 0.231876*10^{02} = 0.2321\underline{\mathit{5}}7*10^{02}}$**;**

$0.000645391 + 0.000945722 = 0.001591113 = 0.00159111 = 0.\ 159111*10^{-02}$;

$0.00159111 + 0.00245383 = 0.00494493 = 0.\ 494493*10^{-02}$;

$0.00494493 + 0.0231834 = 0.02812833 = 0.0281283 = 0.\ 281283*10^{-01}$;

$0.0281283 + 23.1876 = 23.2157283 = 23.2157 = 0.232157*10^{02}$;

Пример 2. Вычисление разности плавающих чисел

(мантисса – 6 десятичных цифр, порядок – 2 десятичных цифры):

0.238617*10^{02} – 0.238616*10^{02} + 0.645391*10^{04} – 0.645392*10^{04} + 0.845791*10^{00} – 0.835790*10^{00} =

a) 0.238617*10^{02} – 0.238616*10^{02} + 0.645391*10^{04} – 0.645392*10^{04} + 0.845791*10^{00} – 0.835790*10^{00} = **0.100000*10^{-05}**

0.238617*10^{02} – 0.238616*10^{02} = 23.8617 – 23.8616 = 0.0001 = **0.100000*10^{03}**

0.100000*10^{-03} + 0.645391*10^{04} = 0.0001 + 6453.91 = 6453.9101 = **0.645391*10^{04}**

0.645391*10^{04} – 0.645392*10^{04} = – 0.000001*10^{04} = **– 0.100000*10^{-01}**

– 0.100000*10^{-01} + 0.845791*10^{00} = – 0.01 + 0.845791 = 0.835791 *10^{00}

0.835791 *10^{00} – 0.835790*10^{00} = **0.000001*10^{00} = 0.100000*$\underline{10^{-05}}$**

b) 0.238617*10^{02} + 0.645391*10^{04} + 0.845791*10^{00} – (0.238616*10^{02} + 0.645392*10^{04} + 0.835790*10^{00}) = **0.100000*10^{00}**

0.238617*10^{02} + 0.645391*10^{04} = 23.8617 – 6453.91 = 6478.6 = **0.647777*10^{04}**

0.647777*10^{04} + 0.845791*10^{00} = 6477.77 + 0.845791 = 6478.615791 = ***0.647862*10^{04}***

0.238616*10^{02} + 0.645392*10^{04} = 23.8616 + 6453.92 = 6477.7816 = **6477.78*10^{04}**

6477.78*10^{04} + 0.835790*10^{00} = 6477.78 + 0.835790 = 6478.61579 = ***0.647852*10^{04}***

0.647862*10^{04} – 0.647852*10^{04}= **0.000010*10^{04} = 0.100000*$\underline{10^{-00}}$**

Выводы

(1) ***При вычислении суммы чисел с одинаковыми знаками*** необходимо упорядочить слагаемые по возрастанию и складывать, начиная с наименьших слагаемых.

(2) ***При вычислении суммы чисел с разными знаками*** необходимо сначала сложить все положительные числа, потом – все отрицательные числа и в конце выполнить одно вычитание.

(3) ***Вычитание*** (сложение чисел с противоположными знаками) ***часто приводит к потере точности***, которая у чисел с плавающей точкой определяется количеством значащих цифр в мантиссе (при вычитании двух близких чисел мантисса «исчезает», что ведет к резкой потере точности).
Итак, ***чем меньше вычитаний, тем точнее результат*.**

Значащими цифрами числа с плавающей точкой называются все цифры его мантиссы за исключением нулей, стоящих в ее конце. Например, у числа 0.**6700089**0000 * 10^3 все цифры, выделенные жирным шрифтом, значащие. При вычитании двух близких чисел почти все значащие цифры пропадают. Например, 0.67000890 * 10^3 - 0.67000880 * 10^3 = 0.00000010 * 10^3 = 0.10 * 10^{-4}. Таким образом, у результата всего одна значащая цифра, хотя у операндов было по 7 значащих цифр.