Курс «Алгоритмы и алгоритмические языки»
1 семестр 2018/2019

Лекция 20

Быстрая сортировка

- ***QuickSort* – рекурсивная Си-функция следующего вида**:

```
/* Быстрая сортировка. Предполагается, что left<right */
static void QuickSort (int *a, int left, int right) {
  /* comp – компаранд, i, j – значения индексов */

  int comp, tmp, i, j;
  i = left; j = right;
  comp = a[(left + right)/2]; //можно a[left] или a[right]

  /* построение Partition – цикл do-while */
  do {
    while (a[i] < comp && i < right)
      i++;
    while (comp < a[j] && j > left)
      j--;
    if (i <= j) {
      tmp = a[i];
      a[i] = a[j];
      a[j] = tmp;
      i++, j--;
    }
  } while (i <= j);
  ...
}
```

Быстрая сортировка

- ***QuickSort* – рекурсивная Си-функция следующего вида**:

```
static void QuickSort (int *a, int left, int right) {
  ...

  /* продолжение сортировки, если не все отсортировано */
  if (left < j)
    QuickSort (a, left, j);
  if (i < right)
    QuickSort (a, i, right);
}
```

- Программа быстрой сортировки.

```
void qsort (int *a, int n) {
  QuickSort (a, 0, n - 1);
}
```

- Нужно, чтобы значение компаранда было таким, чтобы он попал в середину результирующей последовательности. Мы пытаемся угадать, какой из элементов массива имеет такое значение. Чем лучше мы угадаем, тем быстрее выполнится алгоритм

Быстрая сортировка

- Покажем, что цикл **do-while** действительно строит нужное нам разбиение массива **a[]**.

  (1) В процессе работы цикла индексы **i** и **j** не выходят за пределы отрезка [**left, right**], так как в циклах **while** выполняются соответствующие проверки.

  (2) В момент окончания работы цикла
  do-while j ≤ right,
  так как части разбиения не могут быть пустыми: хотя бы один элемент массива **a[]** (в крайнем случае **a[right]**) содержится в правой части разбиения.

  (3) Аналогично, в момент окончания работы цикла
  do-while i ≥ left.

  (4) В момент окончания работы цикла **do-while** любой элемент подмассива **a[left..j]** не больше любого элемента подмассива **a[i..right]**, что очевидно.

Быстрая сортировка

- Работа цикла **do-while** на примере: **5 3 2 6 4 1 3 7**.
  - Пусть в качестве первого компаранда выбран первый элемент массива – **5** (**a[left]**).
  - Во время первого прохода цикла **do-while** после выполнения обоих циклов **while** получим:

    (5) 3 2 6 4 1 {3} 7;

    (в круглых скобках элемент с индексом **i**,
    в фигурных – элемент с индексом **j**).
  - Поскольку **i < j**, элементы, выделенные скобками, нужно поменять местами (оператор **if**):

    3 (3) 2 6 4 {1} 5 7;
  - В результате второго прохода цикла **do-while** получим:
    до обмена **3 3 2 (6) 4 {1} 5 7;**
    после обмена **3 3 2 1 ({4}) 6 5 7;**
  - Третий проход лишь увеличивает **i**.
  - Теперь массив **a** состоит из двух подмассивов
    3 3 2 1 4 и **6 5 7**
    причем **i = 5**, **j = 4**.
    и нужно рекурсивно применить метод к этим подмассивам.

Быстрая сортировка

- При выборе компаранда можно брать первый элемент, значение которого больше значения следующего элемента. Для результирующих подмассивов из примера компаранды заключены в квадратные скобки:

  3 [3] 2 1 4; **[6] 5 7.**

- Если $f(n)$ и $g(n)$ – некоторые функции, то запись $g(n) = \Theta(f(n))$ означает, что найдутся такие константы $c1, c2 > 0$ и такое n_0, что для всех $n \geq n_0$ выполняются соотношения

  $$0 \leq c_1 f(n) \leq g(n) \leq c_2 f(n).$$

  т.е. при больших n
  $f(n)$ хорошо описывает поведение $g(n)$.

Быстрая сортировка

- Оценка времени выполнения алгоритма **`QuickSort`**.

(1) Время выполнения цикла **`do-while`**
$\Theta(n)$, где $n = right - left + 1$.

(2) для алгоритма **`QuickSort`** максимальное (наихудшее) время выполнения $T_{max}(n) = \Theta(n^2)$.

Наихудшее время: при каждом *Partition* массив длины n разбивается на подмассивы длины 1 и $n - 1$.

(2Д) Для $T_{max}(n)$ имеет место соотношение
$T_{max}(n) = T_{max}(n - 1) + \Theta(n)$.
Очевидно, что $T_{max}(1) = \Theta(1)$.
Следовательно,

$$T_{max}(n) = T_{max}(n - 1) + \Theta(n) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \Theta(k) = \Theta(\sum_{k=1}^{n} k) = \quad n \cdot (n - 1)/2 = \Theta(n^2).$$

(3) Если исходный массив **`a`** отсортирован в порядке убывания, время его сортировки в порядке возрастания с помощью алгоритма **`QuickSort`** будет $\Theta(n^2)$.

Быстрая сортировка

- Оценка времени выполнения алгоритма **`QuickSort`**.

(4) Минимальное и среднее время выполнения алгоритма *QuickSort*

$$T_{mean}(n) = \Theta(n \cdot \log n)$$

с разными константами: чем ближе разбиение на подмассивы к сбалансированному, тем константы меньше.

(4Д) Доказательство использует теорему о рекуррентных оценках [1]

(5) Рекуррентное соотношение для минимального (наилучшего) времени сортировки $T_{min}(n)$ имеет вид

$$T_{min}(n) = 2 \cdot T_{min}(n/2) + \Theta(n),$$

так как минимальное время получается тогда, когда на каждом шаге удается выбрать компаранд, который делит массив на два подмассива одинаковой длины $\lceil n/2 \rceil$.

Применяя ту же теорему, получаем $T_{min}(n) = \Theta(n \cdot \log n)$.

[1] Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест. Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 1999. ISBN 5-900916-37-5, с. 66 – 73.

Быстрая сортировка

- Оценка времени выполнения алгоритма **`QuickSort`**.

  (6) Рекуррентное соотношение для $T(n)$ в общем случае, когда на каждом шаге массив делится в отношении $q:(n-q)$, причем q равновероятно распределено между 1 и n, также можно решить и установить, что $T(n) = \Theta(n \cdot \log n)$ (та же книга, с.160 – 164).

Двоичное дерево

- *Двоичное дерево* – набор узлов, который:
  - либо пуст (пустое дерево),
  - либо разбит на три непересекающиеся части:
    узел, называемый *корнем*,
    двоичное дерево, называемое *левым поддеревом*, и
    двоичное дерево, называемое *правым поддеревом*.
- Двоичное дерево не является частным случаем обычного дерева, хотя у этих структур много общего. Основные отличия:
  (1) Пустое дерево является двоичным деревом, но не является обычным деревом.
  (2) Двоичные деревья **(*A*(*B*,*NULL*))** и **(*A*(*NULL*,*B*))** различны, а обычные деревья – одинаковы.
- Термины: узлы, ветви, корень, листья, высота

Двоичное дерево

- Представление двоичного дерева в памяти компьютера

Описание узла двоичного дерева на Си:

```
typedef struct bin_tree {
  char info;
  struct bin_tree *left;
  struct bin_tree *right;
} node;
```

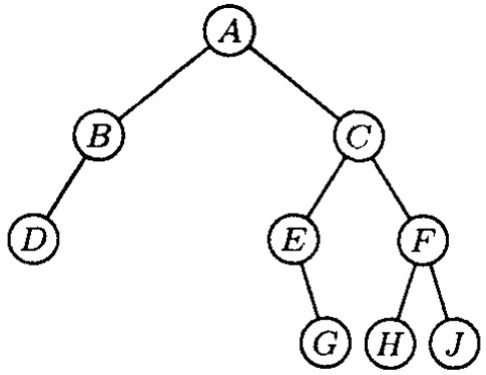


Рис. 1. Двоичное дерево

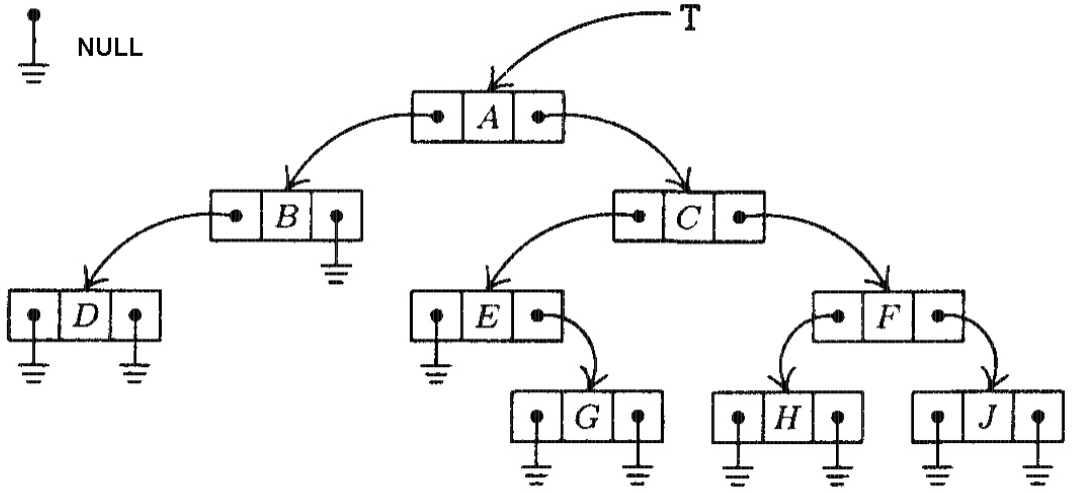


Рис. 2 Представление дерева с рис.1 в компьютере.

Двоичное дерево

Различные способы обхода двоичного дерева

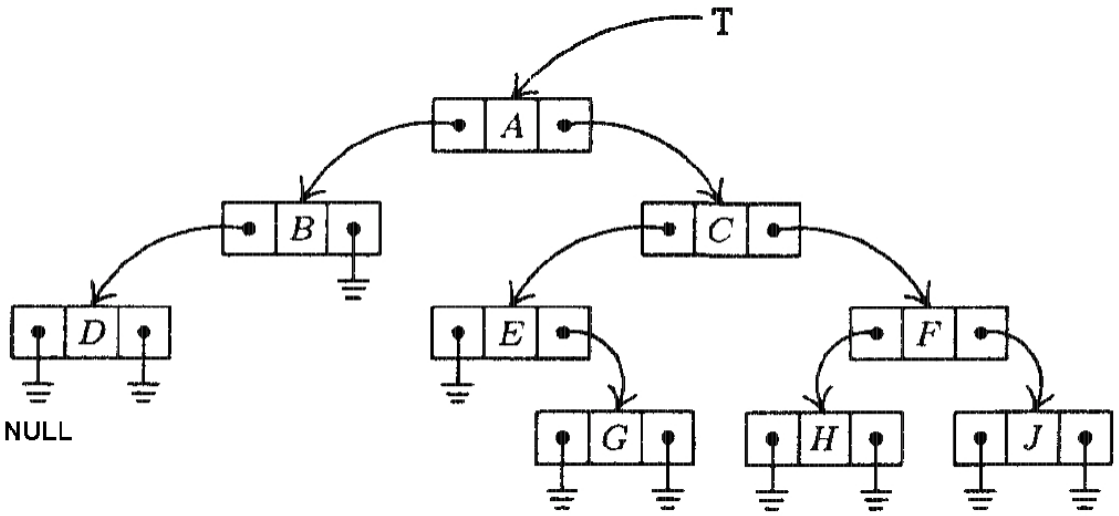
(1) Обход в глубину в *прямом порядке*:

- обработать корень,
- обойти левое поддерево,
- обойти правое поддерево.

Порядок обработки узлов дерева на рисунке

A B D C E G F H J

Линейная последовательность узлов, полученная при прямом обходе, отражает «спуск» информации от корня дерева к листьям.



Двоичное дерево

Различные способы обхода двоичного дерева

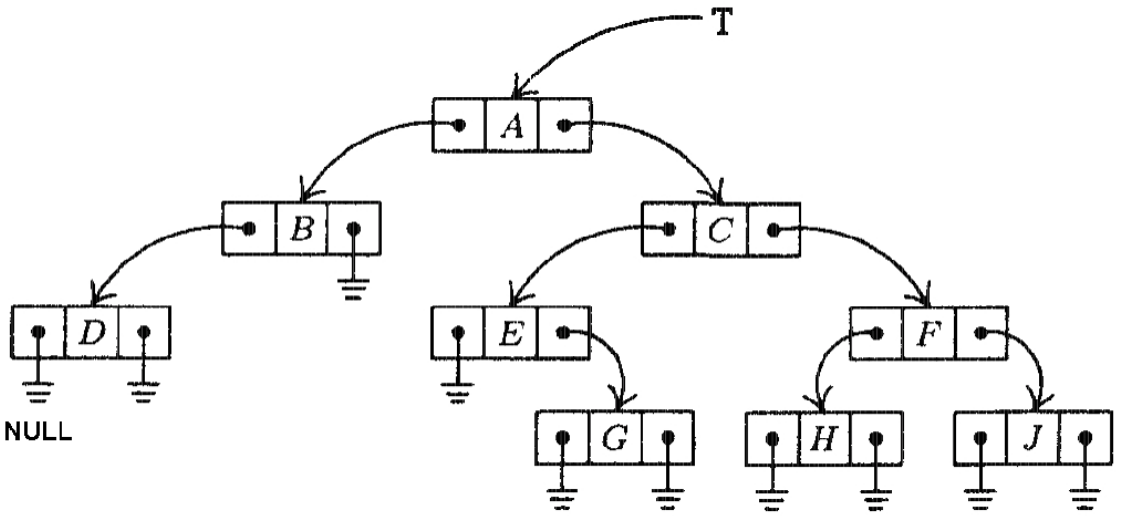
(2) Обход в глубину в *обратном порядке*:

- обойти левое поддерево,
- обойти правое поддерево,
- обработать корень.

Порядок обработки узлов дерева на рисунке:

D B G E H J F C A

Линейная последовательность узлов, полученная при обратном обходе, отражает «подъем» информации от листьев к корню дерева.



Двоичное дерево

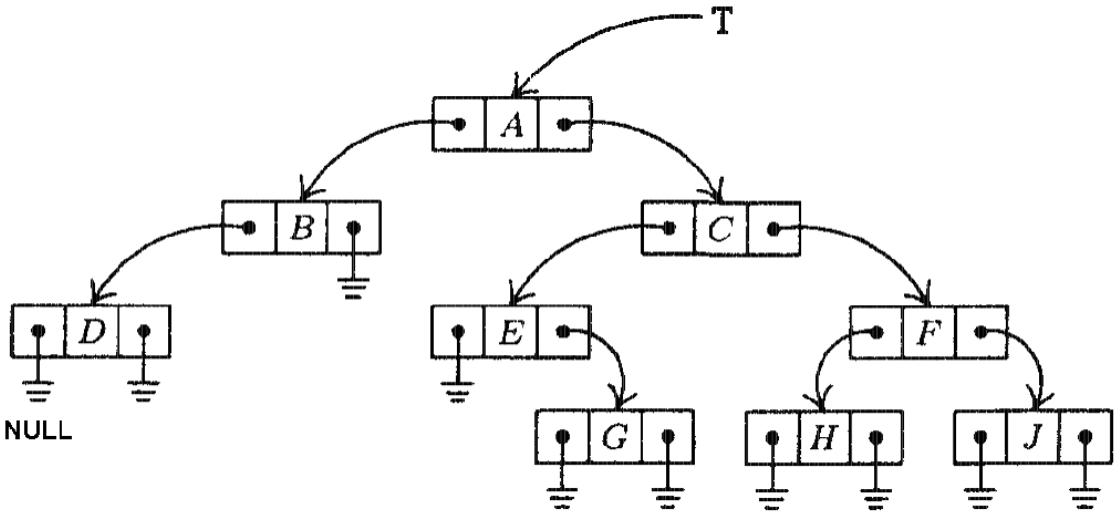
- ***Различные способы обхода двоичного дерева***

(3) Симметричный обход в глубину (обход в *симметричном порядке*):

- обойти левое поддерево,
- обработать корень.
- обойти правое поддерево,

Порядок обработки узлов дерева на рисунке:

D B A E G C H F J



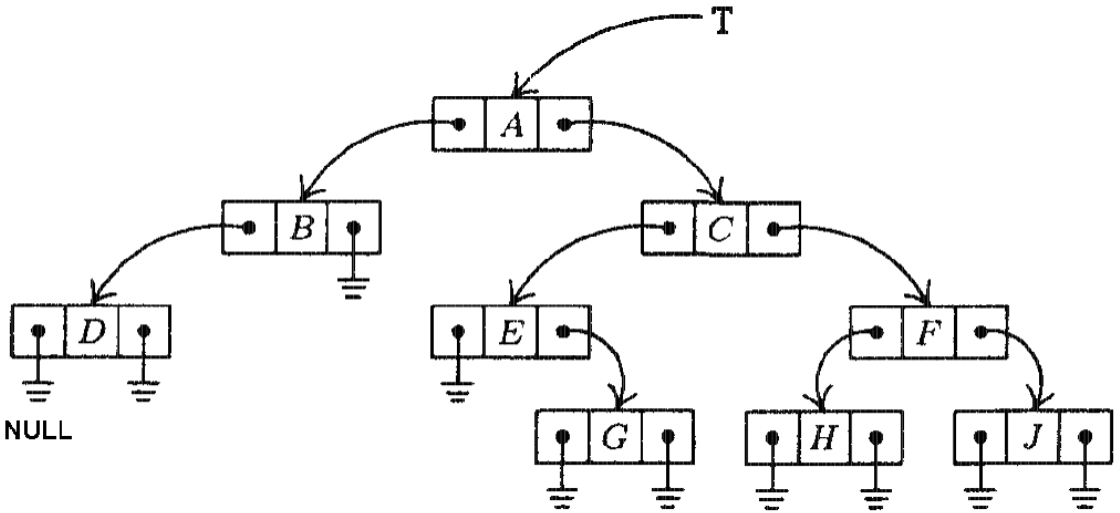
Двоичное дерево

- ***Различные способы обхода двоичного дерева***

(4) Обход двоичного дерева в ширину:
узлы дерева обрабатываются «по уровням»
(уровень составляют все узлы, находящиеся на одинаковом расстоянии от корня)

Порядок обработки узлов дерева на рисунке:

A B C D E F G H J



Двоичное дерево

- Функции, реализующие обходы двоичного дерева, позволяют по указателю каждого узла дерева **P** вычислить указатели узлов

  P_next_pre, P_next_post и **P_next_in,**
  P_pred_pre, P_pred_post и **P_pred_in.**

- Рекурсивные Си-функции обхода двоичного дерева в глубину

(1)
```
void preorder (node * r) {
  if (r == NULL)
    return;
  if (r->info)
    printf ("%c", r->info);
  preorder (r->left);
  preorder (r->right);
}
```

Двоичное дерево

- Рекурсивные Си-функции обхода двоичного дерева в глубину

(2)
```
void postorder (node *r) {
  if (r == NULL)
    return;
  postorder (r->left);
  postorder (r->right);
  if (r->info)
    printf ("%c", r->info);
}
```

(3)
```
void inorder (node *r) {
  if (r == NULL)
    return;
  inorder (r->left);
  if (r->info)
    printf ("%c", r->info);
  inorder (r->right);
}
```

Двоичное дерево

- Нерекурсивная функция обхода двоичного дерева (управление стеком ведется не автоматически, а в самой функции).

  r – указатель на корень дерева;

  t – указатель на корень обрабатываемого (текущего) поддерева;

  stack – массив,на котором моделируется стек,

  depth – глубина стека,

  top – указатель вершины стека;

- Стек требуется для ручного сохранения параметров функции, локальных переменных и точки возврата (если рекурсивных вызовов функции несколько).

- В функции **inorder** нет локальных переменных, а второй из двух рекурсивных вызовов хвостовой, что позволяет не сохранять его параметры в стеке

  - Поэтому сохраняется только параметр функции

Двоичное дерево

- Нерекурсивная функция обхода двоичного дерева

Алгоритм:

(1) [Инициализация]. Сделать стек пустым, т.е. затолкнуть **NULL** на дно стека: **`stack[0] = NULL;`** установить указатель стека на дно стека: **`top = 0;`** установить указатель **`t`** на корень дерева: **`t = r.`**

(2) [Конец ветви].Если **`t == NULL`**, перейти к (4).

(3) [Продолжение ветви]. Затолкнуть **`t`** в стек:

`stack[++top] = t;`

установить **`t = t->left`** и вернуться к шагу (2).

(4) [К обработке правой ветви]. Вытолкнуть верхний элемент стека в **`t: t = stack[top]; top--;`** Если **`t == NULL`**, выполнение алгоритма прекращается, иначе обработать данные узла, на который указывает **`t,`** и перейти к шагу (5).

(5) [Начало обработки правой ветви]. Установить **`t = t->right`** и вернуться к шагу (2).

Двоичное дерево

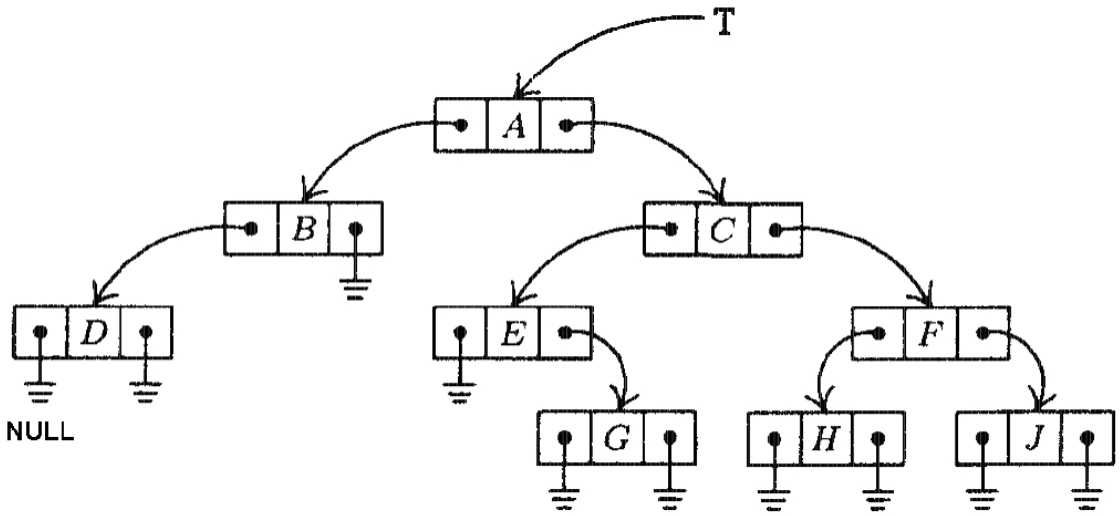
- Нерекурсивная функция обхода двоичного дерева

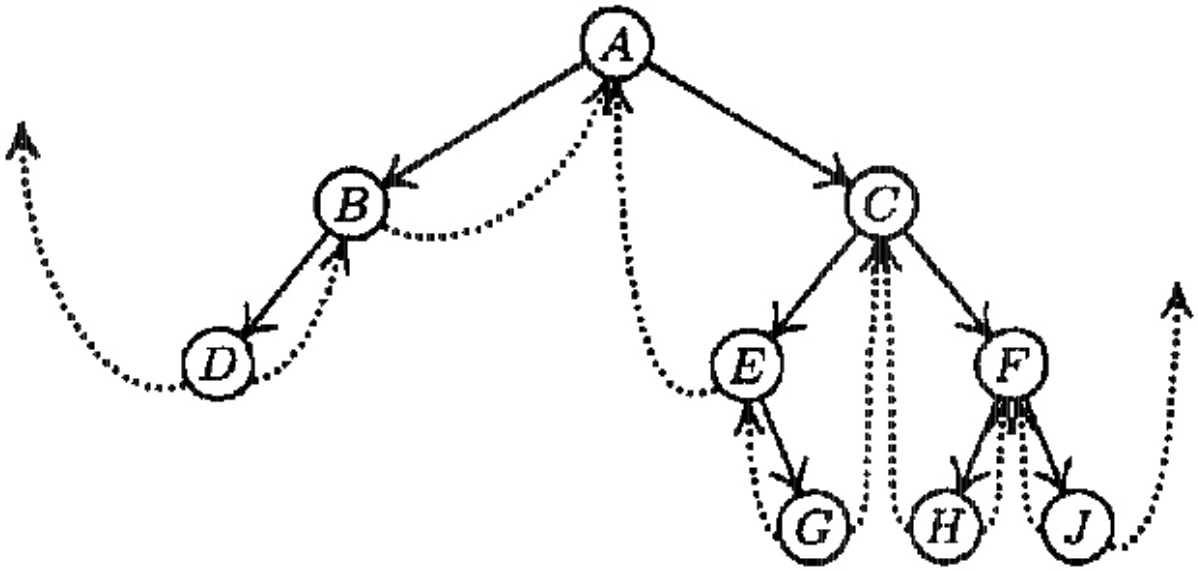
```
int inorder (node *r, char *order) {
  node *t = r;
  node *stack[depth];                    // depth = ?
  int top = 0, i = 0;

  if (!t)
    return 0;
  stack[0] = NULL;                       //Шаг 1
  while (1) {
    while (t) {                          //Шаг 2
      stack[++top] = t;                  //Шаг 3
      t = t->left;
    }
    t = stack[top--];                    //Шаг 4
    if (t) {
      order[i++] = t->info;              //обработка
      t = t->right;                      //Шаг 5
    } else                               //t == NULL
      break;                             //Шаг 4
  }
  return i;
}
```

Двоичное дерево

- ***Прошитое двоичное дерево***





Рассмотрим двоичное дерево на верхнем рисунке.
У этого дерева нулевых указателей, больше, чем ненулевых:
10 против 8.
Это – типичный случай.

Будем записывать вместо нулевых указателей указатели на родителей (или более далеких предков) соответствующих узлов (такие указатели называются *нитями*).
Это позволит при обходе дерева не использовать стек.

Двоичное дерево

- ***Прошитое двоичное дерево***
- Описание узла прошитого двоичного дерева

```
typedef struct bin_tree {
  char info;
  struct bin_tree *left;
  struct bin_tree *right;
  char left_tag;
  char right_tag;
} threaded_node;
```

Нити устанавливаются таким образом, чтобы указывать на предшественников (левые нити) или последователей (правые нити) текущего узла при соответствующем обходе дерева. Например, в случае симметричного обхода:

Обычное дерево	*Прошитое дерево*
`P->left == NULL`	`P->left_tag == 1, P->left == P_pred_in`
`P->left == Q`	`P->left_tag  == 0, P->left  == Q`
`P->right == NULL`	`P->right_tag == 1, P->right == P_next_in`
`P->right == Q`	`P->right_tag == 0, P->right == Q`

Двоичное дерево

- ***Прошитое двоичное дерево***
- Нити существенно упрощают алгоритмы обхода двоичных деревьев. Например, для вычисления для каждого узла **p** указатель узла **P_next_in** можно использовать следующий простой алгоритм:

```
threaded_node * next_in (threaded_node *p) {
  threaded_node *q = p->right;
  if (p->right_tag == 1)
    return q;
  while (q->left_tag == 0) //q != NULL
    q = q->left;           //q->left != NULL
  return q;
}
```

- Функция **next_in** фактически реализует симметричный обход дерева, так как позволяет для произвольного узла дерева **P** найти **P_next_in**. Многократно применяя эту функцию, можно вычислить топологический порядок узлов двоичного дерева, соответствующий симметричному обходу.

Двоичное дерево

- ***Прошитое двоичное дерево***
- Аналогичным образом можно вычислить **P_next_pre** и **P_next_post**.

  Применяя функции **next_pre** (либо **next_post**), можно вычислить топологический порядок узлов, соответствующий прямому (либо обратному) обходу.
- ***Замечания***

  (1) С помощью обычного представления невозможно для произвольного узла **P** вычислить **P_next_in**, не вычисляя всей последовательности узлов.

  (2) Функции **next_in** не требуется стек ни в явной, ни в неявной (рекурсия) форме.

Двоичное дерево

- ***Прошитое двоичное дерево***
- Сравнение функций **`inorder()`**и **`next_in()`** позволяет сделать следующие выводы:

  - Если **`p`** – произвольно выбранный узел дерева,то следующий фрагмент функции **`next_in()`**:

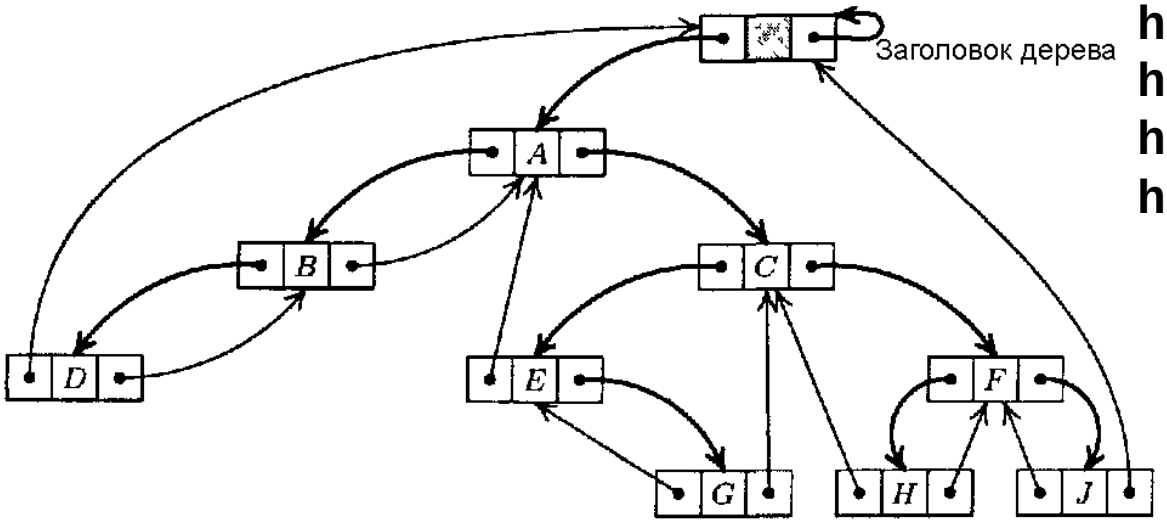
    ```
    q = p->right;
    if (p->right_tag == 1)
      return q;
    ```

    выполняется только один раз.
  - Обход прошитого дерева выполняется быстрее, так как для него не нужны операции со стеком.
  - Для **`inorder()`** требуется больше памяти, чем для **`next_in()`**, из-за массива **`stack[depth]`** (пропорционально высоте дерева).
    Нельзя допускать переполнение стека деревьев (массив выделяется с запасом либо используется реализация стека с динамическим перевыделением памяти).

Двоичное дерево

◈ *Прошитое двоичное дерево*

В функции **inorder()** используется указатель **r** на корень двоичного дерева. Желательно, применив функцию **next_in()** к корню **r**, получить указатель на самый первый узел дерева для выбранного порядка обхода. Для этого к дереву добавляется еще один узел – заголовок дерева (**header**).



поля структуры

```
typedef struct bin_tree
{
  char info;
  struct bin_tree *left;
  struct bin_tree *right;
  char left_tag;
  char right_tag;
} threaded_node;
threaded_node *header;
```

заполняются в заголовке следующим образом

```
header->left_tag = 0;
header->right_tag = 0;
header->left = r;
header->right = header;
```

На рисунке дуги дерева показаны более жирными линиями, чем нити.