Курс «Алгоритмы и алгоритмические языки»
1 семестр 2013/2014

Лекция 19

Двоичные деревья поиска

- Проблема: организовать хранилище данных, которое позволяет хранить большие объемы данных и предоставляет возможность быстро находить и модифицировать данные.
- *Хранилище данных* обеспечивает пользователю *интерфейс*, в котором определены *словарные операции*: *search* (найти, иногда называется *fetch*), *insert* (вставить) и *delete* (удалить).
- Варианты решения – деревья поиска, хеширование
- *Двоичное дерево* – набор узлов, который:
  - либо пуст (пустое дерево),
  - либо разбит на три непересекающиеся части:
    узел, называемый *корнем*,
    двоичное дерево, называемое *левым поддеревом*, и
    двоичное дерево, называемое *правым поддеревом*.
- Двоичное дерево не является частным случаем обычного дерева, хотя у этих структур много общего. Основные отличия:
  (1) Пустое дерево является двоичным деревом, но не является обычным деревом.
  (2) Двоичные деревья **(*A*(*B*,*NULL*))** и **(*A*(*NULL*,*B*))** различны, а обычные деревья – одинаковы.

Двоичные деревья поиска

- Структура для представления узла двоичного дерева поиска:

```
struct BT_node {
  int key;
  struct BT_node *left;
  struct BT_node *right;
  struct BT_node *parent;
}
```

- Ключи в двоичном дереве поиска хранятся с соблюдением свойства упорядоченности:

  Пусть *x* – произвольный узел двоичного дерева поиска. Если узел *y* принадлежит левому поддереву, то

  $$key[y] < key[x],$$

  если *y* находится в правом поддереве узла *x*, то

  $$key[y] > key[x].$$

Двоичные деревья поиска: *поиск узла*

- **На входе**: искомый ключ *k* и указатель *root* на корень поддерева, в котором производится поиск.

  На выходе: указатель на узел с ключом *key* (если такой узел есть), либо пустой указатель NULL.

```
struct BT_node *Btsearch (struct BT_node *root, int k)
{
  if (! root || root->key == k)
    return root;
  if (k < root->key)
    return Btsearch (root->left, k);
  else
    return Btsearch (root->right, k);
}
```

Двоичные деревья поиска: *поиск узла*

- Итеративная версия поиска.

```
struct BT_node *Btsearch (struct BT_node *root, int k)
{
  struct BT_node *p = root;

  while (p && p->key != k)
    if (k < p->key)
      p = p->left;
    else
      p = p->right;
  return p;
}
```

- Среднее время поиска $O(h)$, где h – высота дерева.

Двоичные деревья поиска: *минимум и максимум*

- **На входе**: указатель *root* на корень поддерева.
  На выходе: указатель на узел с минимальным ключом *k*.

```
struct BT_node *Btmin (struct BT_node *root)
{
  struct BT_node *p = root;
  while (p->left)
    p = p->left;
  return p;
}
```

- Среднее время выполнения $O(h)$, где h – высота дерева.

Двоичные деревья поиска: *следующий элемент*

◊ **На входе**: указатель *node* на узел дерева.
На выходе: указатель на следующий за *node* узел дерева.

```
struct BT_node *Btsucc (struct BT_node *node) {
  struct BT_node *p = node, *q;
  /* I случай: правое поддерево узла не пусто */
  if (p->right)
    return Btmin (p->right);
  /* II случай: правое поддерево узла пусто,
     идем по родителям до тех пор, пока не найдем
     родителя, для которого наше поддерево левое */
  q = p->parent;
  while (q && p == q->right) {
    p = q;
    q = q->parent;
  }
  return q;
}
```

◊ Среднее время выполнения $O(h)$, где h – высота дерева.

Двоичные деревья поиска: вставка

- **На входе**: указатель *root* на корень дерева и указатель *node* на новый узел, у которого есть значение ключа, а все поля с указателями имеют значение *NULL*.

```
void Btinsert (struct BT_node *root,
               struct BT_node *node) {
  struct BT_node *p, *q;
  p = root, q = NULL;
  while (p) {
    q = p;
    p = (node->key < p->key) ? p->left : p->right;
  }
  node->parent = q;
  /* подвешиваем node к корню, к q слева или к q справа */
  if (q == NULL)
    root = node;
  else if (node->key < q->key)
    q->left = node;
  else
    q->right = node;
}
```

Двоичные деревья поиска: вставка

- **На входе**: указатель *root* на корень дерева и указатель *node* на новый узел, у которого есть значение ключа, а все поля с указателями имеют значение *NULL*.

```
struct BT_node * Btinsert (struct BT_node *root,
                           struct BT_node *node) {
  struct BT_node *p, *q;
  p = root, q = NULL;
  while (p) {
    q = p;
    p = (node->key < p->key) ? p->left : p->right;
  }
  node->parent = q;
  if (q == NULL)
    root = node;
  else if (node->key < q->key)
    q->left = node;
  else
    q->right = node;
  return root;
}
```

Двоичные деревья поиска: удаление

- **На входе**: указатель на корень *root* дерева *T* и указатель на узел *n* дерева *T*.

  На выходе: двоичное дерево *T* с удаленным узлом *n* (ключи нового дерева по-прежнему упорядочены).

- Необходимо рассмотреть три случая: (1) у узла *n* нет детей (листовой узел); (2) у узла *n* только один ребенок; (3) у узла *n* два ребенка.
  - (1) просто удаляем узел *n*;
  - (2) вырезаем узел *n*, соединив единственного ребенка узла *n* с родителем узла *n*.
  - (3) находим *succ*(*n*) и удаляем его, поместив ключ *succ*(*n*) в узел *n*.

Двоичные деревья поиска: удаление

- Шаг 1: если у *n* меньше двух детей, удаляем *n*, иначе удаляем *succ*(*n*); устанавливаем указатель *y* на удаляемый узел.
- Шаг 2: находим ребенка удаляемого узла (ребенка либо нет, либо он единственный) и устанавливаем на него указатель *x*.
- Шаг 3: подвешиваем ребенка *y* (указатель *x*) к родителю *y*; если у *y* нет родителя, новым корнем дерева становится *x*; устанавливаем в соответствующем поле родителя указатель на *x*, полностью исключая *y* из дерева.
- Шаг 4: если удаляемый узел *succ*(*n*), заменяем данные узла *n* на данные узла *succ*(*n*).

Двоичные деревья поиска: удаление

```
struct BT_node * BTdelete (struct BT_node **root,
                           struct BT_node *n) {
  struct BT_node *x, *y;
  /* Шаг 1: y - указатель на удаляемый узел n */
  y = (! n->left || ! n->right) ? n : BT_succ (n);
  /* Шаг 2: x - указатель на ребенка y, либо NULL */
  x = y->left ? y->left : y->right;
  /* Шаг 3: если x - ребенок y, вырезаем y из родителей */
  if (x)
    x->parent = y->parent;
  /* Шаг 3: если у y нет родителя, новым корнем дерева становится x */
  if (! y->parent)
    *root = x;
  else {
    /* Шаг 3: x присоединяется к y->parent с требуемой стороны */
    if (y == y->parent->left)
      y->parent->left = x;
    else
      y->parent->right = x;
  }
  <...>
```

Двоичные деревья поиска: удаление

```
struct BT_node * BTdelete (struct BT_node **root,
                           struct BT_node *n) {
  struct BT_node *x, *y;
   <...>
  /* Шаг 4: если удалялся не узел n, а succ(n), необходимо
     заменить данные узла n на данные узла succ(n) */
  if (y != n)
    n->key = y->key;
  /* функция возвращает указатель удаленного узла, что
   дает возможность использовать этот узел в других
   структурах, либо очистить занимаемую им память */
  return y;
}
```

- Среднее время выполнения $O(h)$, где h – высота дерева.

Построение двоичного дерева поиска.

- **Постановка задачи.** Пусть имеется множество K из m ключей:

$$K = \{k_0, k_1, \ldots, k_{m-1}\}$$

Разбиение K на три подмножества K_1, K_2, K_3:

- $|K_2| = 1, |K_1| \geq 0, |K_3| \geq 0.$
- $K_2 = \{k\} \Rightarrow \forall l \in K_1: l < k$ и $\forall r \in K_3: r \geq k$

Далее по рекурсии: разбиваем K_1 на K_{11}, K_{12}, K_{13}

K_3 на K_{31}, K_{32}, K_{33}

и т.д. пока ключи не кончатся

- **Пример**: $K = \{15,10,1,3,8,12,4\}$.

Первое разбиение: $\{1,3,4\}, \{8\}, \{15,10,12\}$;

второе разбиение: $\{\{1\}\{3\}\{4\}\}\{8\}\{\{10\}\{12\}\{15\}\}$.

Получилось полностью сбалансированное двоичное дерево.

- **Определение**. Дерево называется *полностью сбалансированным* (*совершенным*), если длина пути от корня до любой листовой вершины одинакова.

Построение двоичного дерева поиска.

- Пусть h – высота полностью сбалансированного двоичного дерева. Тогда число вершин m должно быть равно:

$$m = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{h\text{-}1} = 2^h - 1$$

откуда $h = \log_2(m + 1)$.

- Если все m ключей известны заранее, их можно отсортировать за $O(m \cdot \log_2 m)$, после чего построение сбалансированного дерева будет тривиальной задачей.
- Если дерево строится по мере поступления ключей, то возможны все варианты: от линейного дерева с высотой $O(m)$ до полностью сбалансированного дерева с высотой $O(\log_2 m)$.
- Пусть $T = \{root, left, right\}$ – двоичное дерево; тогда $h_T = \max(h_{left}, h_{right}) + 1$.

Деревья Фибоначчи

- **Числа Фибоначчи** возникли в решении задачи о кроликах, предложенном в XIII веке Леонардо из Пизы, известным как Фибоначчи.

  Задача о кроликах: пара новорожденных кроликов помещена на остров. Каждый месяц любая пара дает приплод – также пару кроликов.
  Пара начинает давать приплод в возрасте двух месяцев.

  Сколько кроликов будет на острове в конце n-го месяца?

  В конце первого и второго месяцев на острове будет одна пара кроликов:

$$f_1 = 1, f_2 = 1.$$

  В конце третьего месяца родится новая пара, так что

$$f_3 = f_2 + f_1 = 2.$$

  По индукции можно доказать, что для $n \geq 3$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}.$$

Деревья Фибоначчи

- n-е число Фибоначчи вычисляет следующая функция:

```
int Fbn (int n) {
      if (n == 1 || n == 2)
            return 1;
      else {
            int g, h, k, Fb;
            g = h = 1;
            for (k = 2; k < n; k++) {
              Fb = g + h;
              h = g;
              g = Fb;
            }
            return Fb;
      }
}
```

Деревья Фибоначчи

◊ ***Определение*** дерева Фибоначчи
(это тоже искусственное дерево).

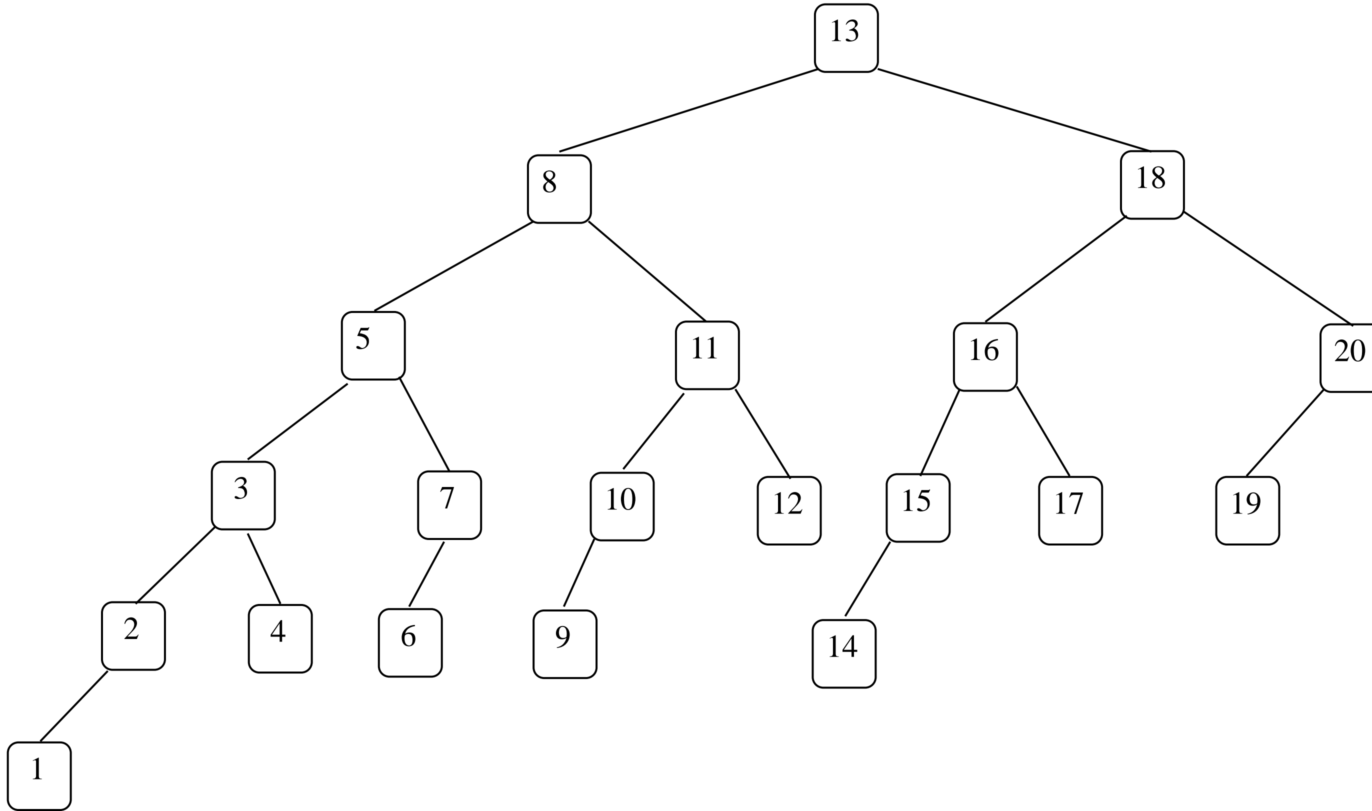
(1) Пустое дерево – это дерево Фибоначчи с высотой $h = 0$.

(2) Двоичное дерево, левое и правое поддерево которого есть деревья Фибоначчи с высотами соответственно $h-1$ и $h-2$ (либо $h-2$ и $h-1$), есть дерево Фибоначчи с высотой h.

Из определения следует, что в дереве Фибоначчи значения высот левого и правого поддерева отличаются ровно на 1.

Деревья Фибоначчи

◊ ***Пример***. Дерево Фибоначчи с $h = 6$.



Деревья Фибоначчи

◈ ***Теорема 1.*** Число вершин в дереве Фибоначчи F_h высоты h равно $m(h) = f_{h+2} - 1$.

Доказательство (по индукции).

$h = 0$: $m(0) = f_2 - 1 = 0$

$m(1) = f_3 - 1 = 1.$

Шаг: по определению $m(h) = m(h-1) + m(h-2) + 1.$

Имеем $m(h) = (f_{h+1} - 1) + (f_h - 1) + 1 = f_{h+2} - 1,$

так как $f_h + f_{h+1} = f_{h+2}$

Деревья Фибоначчи

- ***Теорема 2.*** Пусть C_1 и C_2 таковы, что уравнение

$$r^2 - C_1 r - C_2 = 0 \qquad (*)$$

имеет два различных корня r_1 и r_2, $r_1 \neq r_2$.

Тогда для $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$

выполняется соотношение $a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2}$.

Доказательство. r_1 и r_2 – корни уравнения (*),

то $r_1^2 = C_1 r_1 + C_2$

$r_2^2 = C_1 r_2 + C_2$.

Имеем:

$$C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} = C_1(\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + C_2(\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}) =$$

$$= \alpha_1 r_1^{n-2} (C_1 r_1 + C_2) + \alpha_2 r_2^{n-2} (C_1 r_2 + C_2) =$$

$$= \alpha_1 r_1^{n-2} r_1^2 + \alpha_2 r_2^{n-2} r_2^2 = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n = a_n \qquad (**)$$

Теорема доказана.

Деревья Фибоначчи

- ***Теорема 3.*** Пусть C_1 и C_2 таковы, что уравнение

$$r^2 - C_1 r - C_2 = 0 \qquad (*)$$

имеет два корня r_1 и r_2, $r_1 \neq r_2$.
Тогда

из $a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2}$ и начальных условий a_0 и a_1

следует $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ для n = 1, 2, ...

Доказательство. Нужно не только повторить в обратном порядке вывод (**), но и подобрать такие α_1 и α_2, чтобы

$$a_0 = \alpha_1 + \alpha_2,\ a_1 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \qquad (***)$$

Рассматривая (***) как систему линейных уравнений относительно α_1 и α_2, получим:

$$\alpha_1 = \frac{a_1 - a_0 \cdot r_2}{r_1 - r_2}, \qquad \alpha_2 = \frac{-a_1 + a_0 \cdot r_1}{r_1 - r_2}$$

Теорема доказана.

Деревья Фибоначчи

- Применим доказанные теоремы к числам Фибоначчи:

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

Уравнение $r^2 - r - 1 = 0$ имеет корни

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Следовательно, согласно теореме 3

$$f_n = \alpha_1 \cdot r_1^n + \alpha_2 \cdot r_2^n = \alpha_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

$$f_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 0,$$

$$f_1 = \alpha_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \alpha_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Деревья Фибоначчи

Откуда

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Согласно теореме 1

$$m(h) = f_{h+2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{h+2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{h+2} - 1$$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{h+2} \right| < 1$$

$$m(h) + 1 > \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{h+2}$$

Деревья Фибоначчи

Обозначение $\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$m(h)+1 > \frac{1}{\sqrt{5}}\gamma^{h+2} \qquad (****)$$

Логарифмируя обе части (****) , получаем

$$h+2 < \frac{\log_2(m+1)}{\log_2 \gamma} + \frac{\log_2 \sqrt{5}}{\log_2 \gamma}$$

откуда $$h < 1{,}44 \cdot \log_2(m+1) - 0{,}32$$

Таким образом, мы доказали, что для деревьев Фибоначчи с числом вершин m количество сравнений в худшем случае не превышает

$$1{,}44 \cdot \log_2(m+1) - 0{,}32$$