Курс «Алгоритмы и алгоритмические языки»
1 семестр 2017/2018

Лекция 17

Двоичное дерево

- *Двоичное дерево* – набор узлов, который:
  - либо пуст (пустое дерево),
  - либо разбит на три непересекающиеся части:
    узел, называемый *корнем*,
    двоичное дерево, называемое *левым поддеревом*, и
    двоичное дерево, называемое *правым поддеревом*.
- Двоичное дерево не является частным случаем обычного дерева, хотя у этих структур много общего. Основные отличия:
  (1) Пустое дерево является двоичным деревом, но не является обычным деревом.
  (2) Двоичные деревья **`(A(B,NULL))`** и **`(A(NULL,B))`** различны, а обычные деревья – одинаковы.
- Термины: узлы, ветви, корень, листья, высота

Двоичное дерево

- Представление двоичного дерева в памяти компьютера

Описание узла двоичного дерева на Си:

```
typedef struct bin_tree {
  char info;
  struct bin_tree *left;
  struct bin_tree *right;
} node;
```

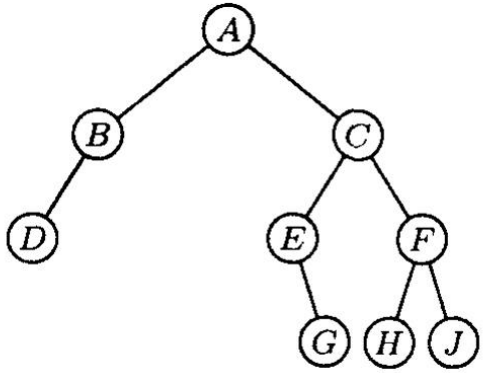


Рис. 1. Двоичное дерево

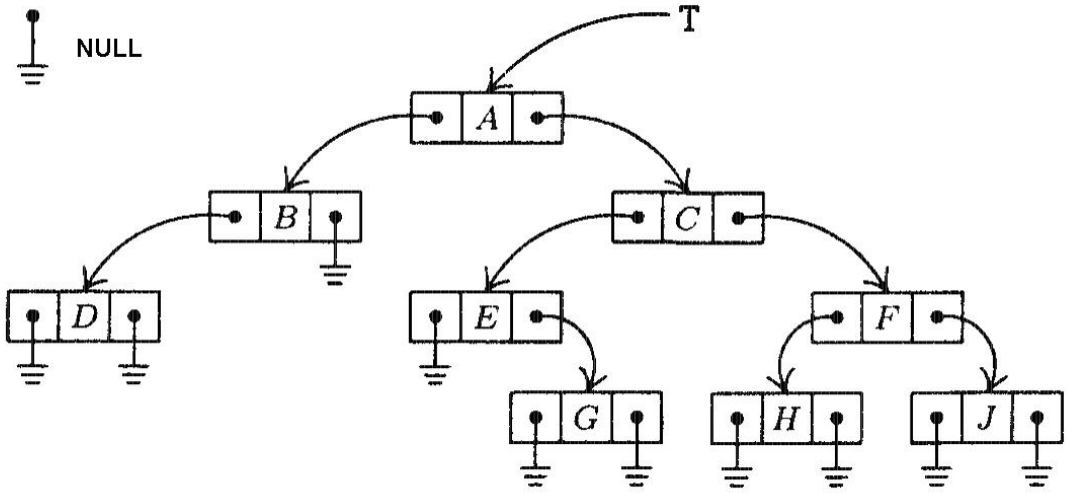


Рис. 2 Представление дерева с рис.1 в компьютере.

Двоичное дерево

- ***Различные способы обхода двоичного дерева***

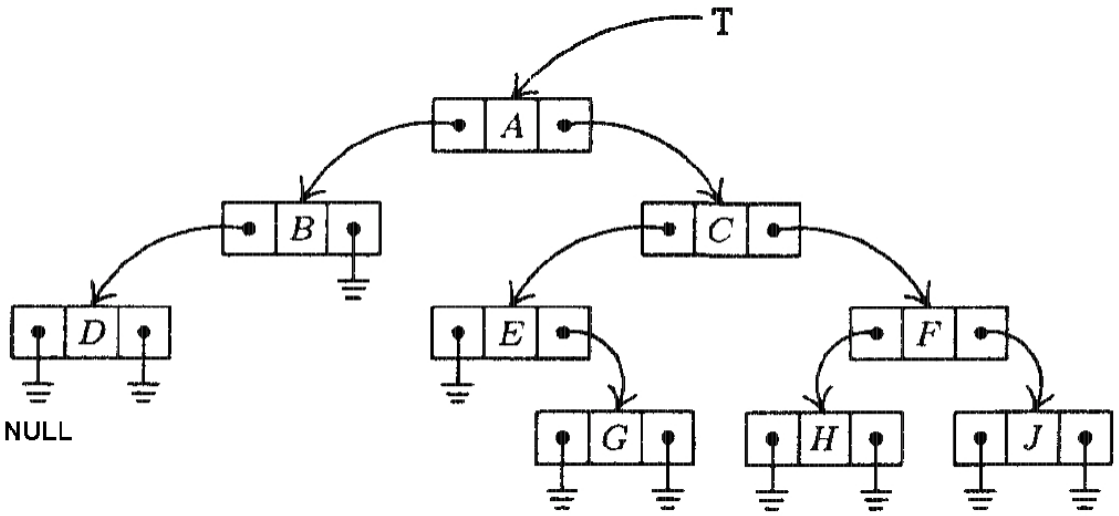
(1) Обход в глубину в *прямом порядке*:

- обработать корень,
- обойти левое поддерево,
- обойти правое поддерево.

Порядок обработки узлов дерева на рисунке

A B D C E G F H J

Линейная последовательность узлов, полученная при прямом обходе, отражает «спуск» информации от корня дерева к листьям.



Двоичное дерево

Различные способы обхода двоичного дерева

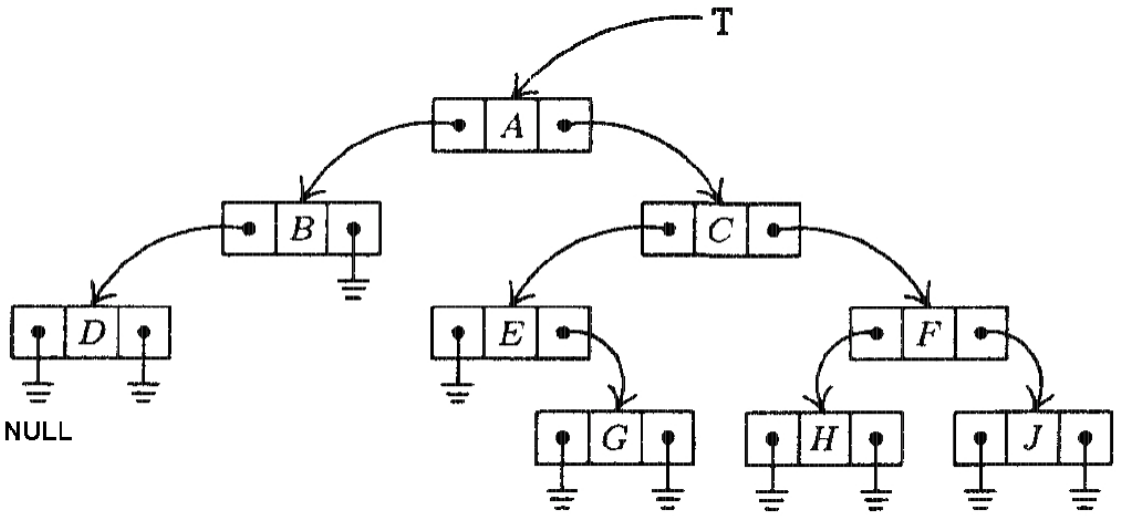
(2) Обход в глубину в *обратном порядке*:

- обойти левое поддерево,
- обойти правое поддерево,
- обработать корень.

Порядок обработки узлов дерева на рисунке:

D B G E H J F C A

Линейная последовательность узлов, полученная при обратном обходе, отражает «подъем» информации от листьев к корню дерева.



Двоичное дерево

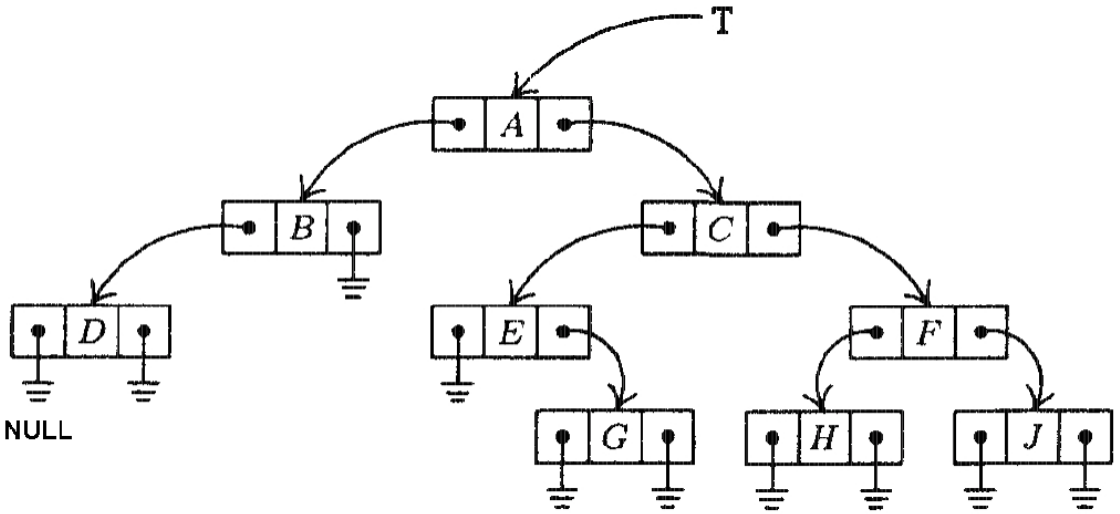
- ***Различные способы обхода двоичного дерева***

(3) Симметричный обход в глубину (обход в *симметричном порядке*):

- обойти левое поддерево,
- обработать корень.
- обойти правое поддерево,

Порядок обработки узлов дерева на рисунке:

D B A E G C H F J



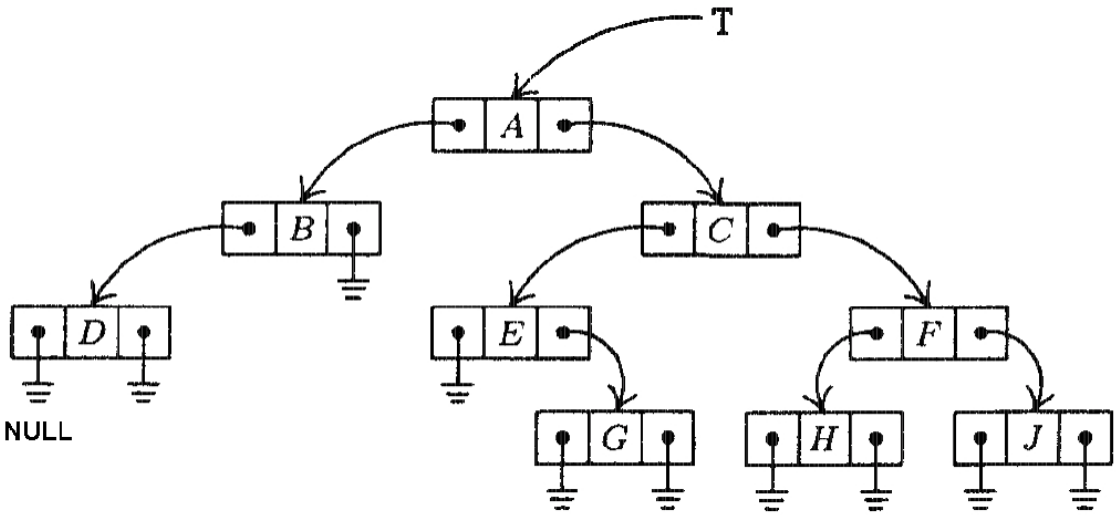
Двоичное дерево

- ***Различные способы обхода двоичного дерева***

(4) Обход двоичного дерева в ширину:
узлы дерева обрабатываются «по уровням»
(уровень составляют все узлы, находящиеся на одинаковом расстоянии от корня)

Порядок обработки узлов дерева на рисунке:

A B C D E F G H J



Двоичное дерево

- Функции, реализующие обходы двоичного дерева, позволяют по указателю каждого узла дерева **P** вычислить указатели узлов

  P_next_pre, P_next_post и **P_next_in,**
  P_pred_pre, P_pred_post и **P_pred_in.**

- Рекурсивные Си-функции обхода двоичного дерева в глубину

(1)
```
void preorder (node * r) {
  if (r == NULL)
    return;
  if (r->info)
    printf ("%c", r->info);
  preorder (r->left);
  preorder (r->right);
}
```

Двоичное дерево

- Рекурсивные Си-функции обхода двоичного дерева в глубину

(2)
```
void postorder (node *r) {
  if (r == NULL)
    return;
  postorder (r->left);
  postorder (r->right);
  if (r->info)
    printf ("%c", r->info);
}
```

(3)
```
void inorder (node *r) {
  if (r == NULL)
    return;
  inorder (r->left);
  if (r->info)
    printf ("%c", r->info);
  inorder (r->right);
}
```

Двоичное дерево

- Нерекурсивная функция обхода двоичного дерева (управление стеком ведется не автоматически, а в самой функции).

  `r` – указатель на корень дерева;

  `t` – указатель на корень обрабатываемого (текущего) поддерева;

  `stack` – массив,на котором моделируется стек,

  `depth` – глубина стека,

  `top` – указатель вершины стека;

- Стек требуется для ручного сохранения параметров функции, локальных переменных и точки возврата (если рекурсивных вызовов функции несколько).

- В функции **`inorder`** нет локальных переменных, а второй из двух рекурсивных вызовов хвостовой, что позволяет не сохранять его параметры в стеке

  - Поэтому сохраняется только параметр функции

Двоичное дерево

- Нерекурсивная функция обхода двоичного дерева

***Алгоритм*:**

(1) [Инициализация]. Сделать стек пустым, т.е. затолкнуть **NULL** на дно стека: **`stack[0] = NULL;`** установить указатель стека на дно стека: **`top = 0;`** установить указатель **`t`** на корень дерева: **`t = r.`**

(2) [Конец ветви].Если **`t == NULL`**, перейти к (4).

(3) [Продолжение ветви]. Затолкнуть **`t`** в стек:

`stack[++top] = t;`

установить **`t = t->left`** и вернуться к шагу (2).

(4) [К обработке правой ветви]. Вытолкнуть верхний элемент стека в **`t: t = stack[top]; top--;`** Если **`t == NULL`**, выполнение алгоритма прекращается, иначе обработать данные узла, на который указывает **`t,`** и перейти к шагу (5).

(5) [Начало обработки правой ветви]. Установить **`t = t->right`** и вернуться к шагу (2).

Двоичное дерево

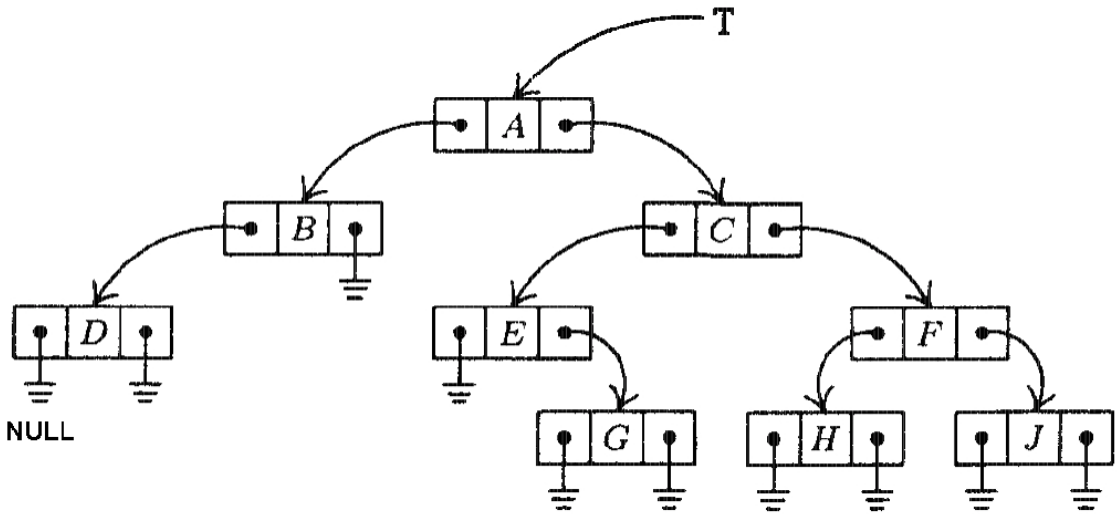
- Нерекурсивная функция обхода двоичного дерева

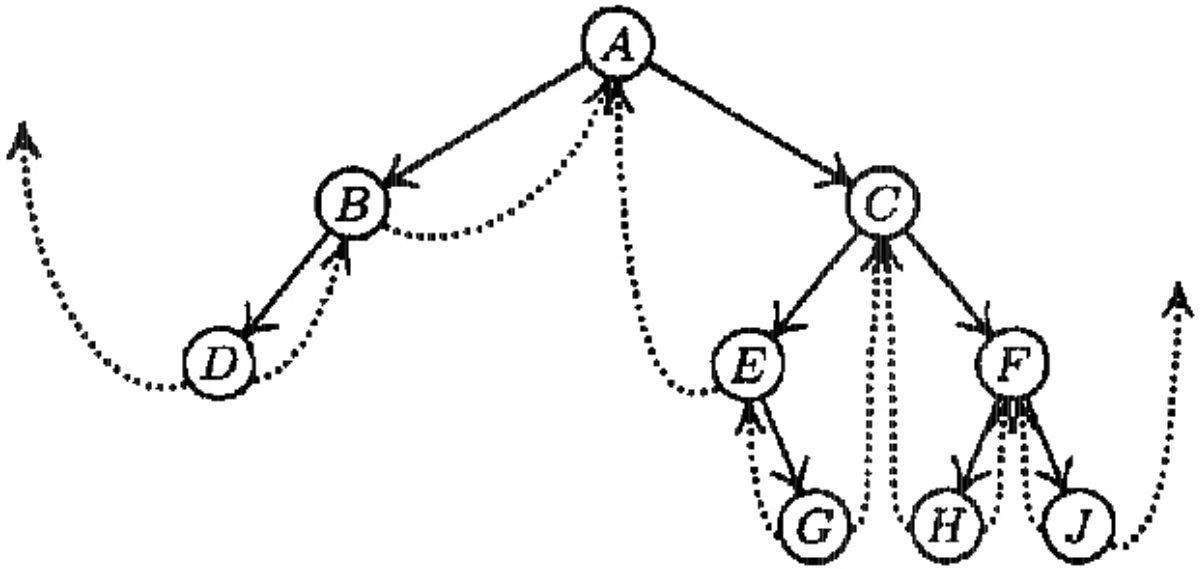
```
int inorder (node *r, char *order) {
  node *t = r;
  node *stack[depth];                    // depth = ?
  int top = 0, i = 0;

  if (!t)
    return 0;
  stack[0] = NULL;                       //Шаг 1
  while (1) {
    while (t) {                          //Шаг 2
      stack[++top] = t;                  //Шаг 3
      t = t->left;
    }
    t = stack[top--];                    //Шаг 4
    if (t) {
      order[i++] = t->info;              //обработка
      t = t->right;                      //Шаг 5
    } else                               //t == NULL
      break;                             //Шаг 4
  }
  return i;
}
```

Двоичное дерево

- ***Прошитое двоичное дерево***





Рассмотрим двоичное дерево на верхнем рисунке.
У этого дерева нулевых указателей, больше, чем ненулевых:
10 против 8.
Это – типичный случай.

Будем записывать вместо нулевых указателей указатели на родителей (или более далеких предков) соответствующих узлов (такие указатели называются *нитями*).
Это позволит при обходе дерева не использовать стек.

Двоичное дерево

- ***Прошитое двоичное дерево***
- Описание узла прошитого двоичного дерева

```
typedef struct bin_tree {
  char info;
  struct bin_tree *left;
  struct bin_tree *right;
  char left_tag;
  char right_tag;
} threaded_node;
```

Нити устанавливаются таким образом, чтобы указывать на предшественников (левые нити) или последователей (правые нити) текущего узла при соответствующем обходе дерева. Например, в случае симметричного обхода:

Обычное дерево	***Прошитое дерево***
`P->left == NULL`	`P->left_tag == 1, P->left == P_pred_in`
`P->left == Q`	`P->left_tag == 0, P->left == Q`
`P->right == NULL`	`P->right_tag == 1, P->right == P_next_in`
`P->right == Q`	`P->right_tag == 0, P->right == Q`

Двоичное дерево

- ***Прошитое двоичное дерево***
- Нити существенно упрощают алгоритмы обхода двоичных деревьев. Например, для вычисления для каждого узла **p** указатель узла **P_next_in** можно использовать следующий простой алгоритм:

```
threaded_node * next_in (threaded_node *p) {
  threaded_node *q = p->right;
  if (p->right_tag == 1)
    return q;
  while (q->left_tag == 0) //q != NULL
    q = q->left;           //q->left != NULL
  return q;
}
```

- Функция **next_in** фактически реализует симметричный обход дерева, так как позволяет для произвольного узла дерева **P** найти **P_next_in**. Многократно применяя эту функцию, можно вычислить топологический порядок узлов двоичного дерева, соответствующий симметричному обходу.

Двоичное дерево

- ***Прошитое двоичное дерево***
- Аналогичным образом можно вычислить **`P_next_pre`** и **`P_next_post`**.

  Применяя функции **`next_pre`** (либо **`next_post`**), можно вычислить топологический порядок узлов, соответствующий прямому (либо обратному) обходу.
- ***Замечания***

  (1) С помощью обычного представления невозможно для произвольного узла **`P`** вычислить **`P_next_in`**, не вычисляя всей последовательности узлов.

  (2) Функции **`next_in`** не требуется стек ни в явной, ни в неявной (рекурсия) форме.

Двоичное дерево

- ***Прошитое двоичное дерево***
- Сравнение функций **`inorder()`** и **`next_in()`** позволяет сделать следующие выводы:

  - Если **`p`** – произвольно выбранный узел дерева,то следующий фрагмент функции **`next_in()`**:

```
q = p->right;
if (p->right_tag == 1)
  return q;
```

    выполняется только один раз.
  - Обход прошитого дерева выполняется быстрее, так как для него не нужны операции со стеком.
  - Для **`inorder()`** требуется больше памяти, чем для **`next_in()`**, из-за массива **`stack[depth]`** (пропорционально высоте дерева).
    Нельзя допускать переполнение стека деревьев (массив выделяется с запасом либо используется реализация стека с динамическим перевыделением памяти).

Двоичное дерево

◊ *Прошитое двоичное дерево*

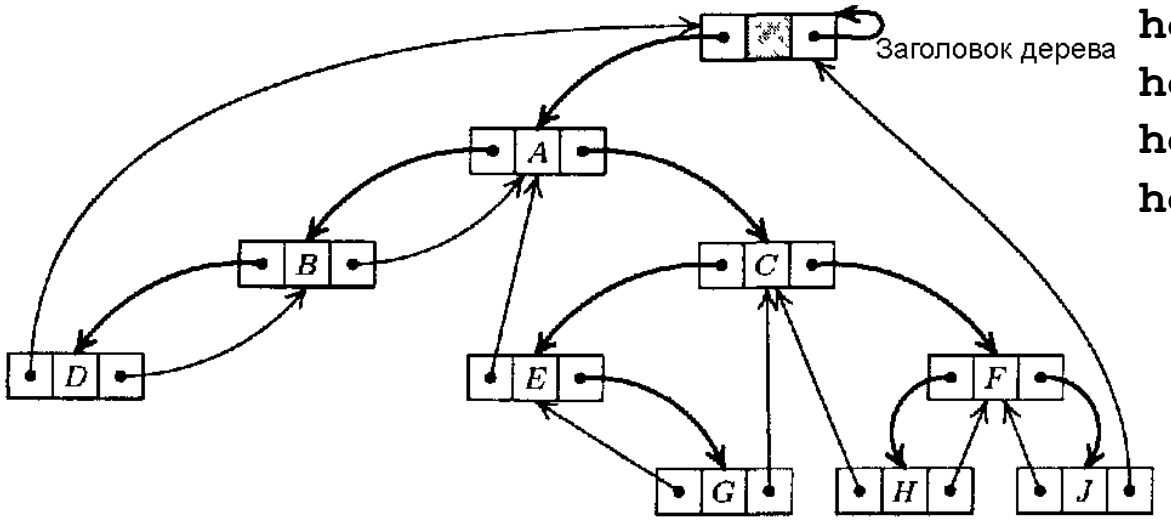
В функции **inorder()** используется указатель **r** на корень двоичного дерева. Желательно, применив функцию **next_in()** к корню **r**, получить указатель на самый первый узел дерева для выбранного порядка обхода. Для этого к дереву добавляется еще один узел – заголовок дерева (**header**).

поля структуры

```
typedef struct bin_tree
{
  char info;
  struct bin_tree *left;
  struct bin_tree *right;
  char left_tag;
  char right_tag;
} threaded_node;
threaded_node *header;
```

заполняются в заголовке следующим образом

```
header->left_tag = 0;
header->right_tag = 0;
header->left = r;
header->right = header;
```



На рисунке дуги дерева показаны более жирными линиями, чем нити.