

**Курс «Алгоритмы и алгоритмические языки»
1 семестр 2017/2018**

Лекция 15

Сложность алгоритмов

- ◆ **Размер входа:** числовая величина, характеризующая количество входных данных (например – длина битовой записи чисел - параметров алгоритма)
- ◆ **Сложность в наихудшем случае:** функция размера входа, отражающая максимум затрат на выполнение алгоритма для данного размера
 - ◆ временная сложность
 - ◆ пространственная сложность (затраты памяти)
 - ◆ часто оценивают не все затраты, а только самые “дорогие” операции
- ◆ **Сложность в среднем:** функция размера входа, отражающая средние затраты на выполнение алгоритма для входа данного размера (учет вероятностей входа)
- ◆ **Асимптотические оценки сложности:** O -нотация (оценка сверху), точная O -оценка, Θ -оценка.
- ◆ Подробности: С.А. Абрамов. Лекции о сложности алгоритмов. М.: МЦНМО, 2009

Формальная постановка задачи поиска по образцу

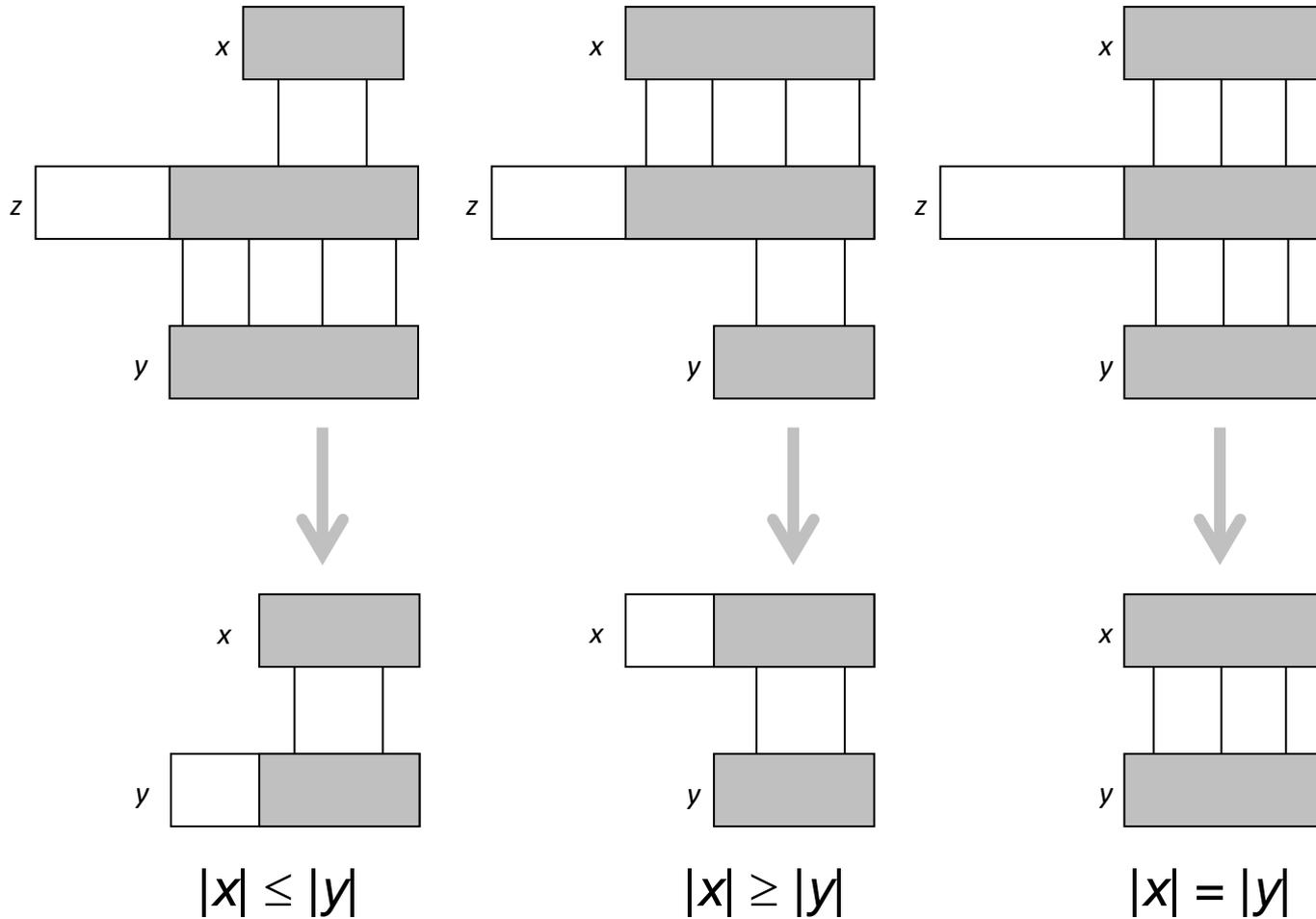
- ◇ Даны *текст* – массив $T[N]$ длины N и *образец* – массив $P[m]$ длины $m \leq N$, где значениями элементов массивов T и P являются символы некоторого *алфавита* A .
- ◇ Говорят, что образец P входит в текст T со сдвигом s , если $0 \leq s \leq N - m$ и для всех $i = 1, 2, \dots, m$ $T[s + i] = P[i]$.
- ◇ Сдвиг $s(T, P)$ называется *допустимым*, если P входит в T со сдвигом $s = s(T, P)$, и *недопустимым* в противном случае.
- ◇ **Задача поиска подстрок** состоит в нахождении множества допустимых сдвигов $s(T, P)$ для заданного текста T и образца P .

Формальная постановка задачи поиска по образцу

- ◇ **Терминология.** Пусть строки $x, y, w \in A^*$, $\varepsilon \in A^*$ - пустая строка;
 $|x|$ - длина строки x ;
 xy – конкатенация строк x и y ; $|xy| = |x| + |y|$;
 $x = wy \rightarrow w$ – префикс (начало) x (обозначение $w \prec x$);
 $x = yw \rightarrow w$ – суффикс (конец) x (обозначение $w \succ x$);
если w – префикс или суффикс x , то $|w| \leq |x|$;
отношения префикса и суффикса *транзитивны*.
Для любых $x, y \in A^*$ и любого $a \in A$ соотношения $x \succ y$
и $xa \succ ya$ *равносильны*.
- ◇ Если $S = S[r]$ – строка длины r , то ее префикс длины k , $k \leq r$ будет обозначаться $S_k = S[k]$; ясно, что $S_0 = \varepsilon$, $S_r = S$.

Лемма (о двух суффиксах)

◇ Пусть x , y и z – строки, для которых $x \succ z$ и $y \succ z$.
Тогда если $|x| \leq |y|$, то $x \succ y$, если $|x| \geq |y|$, то $y \succ x$,
если $|x| = |y|$, то $x = y$.



Простой алгоритм

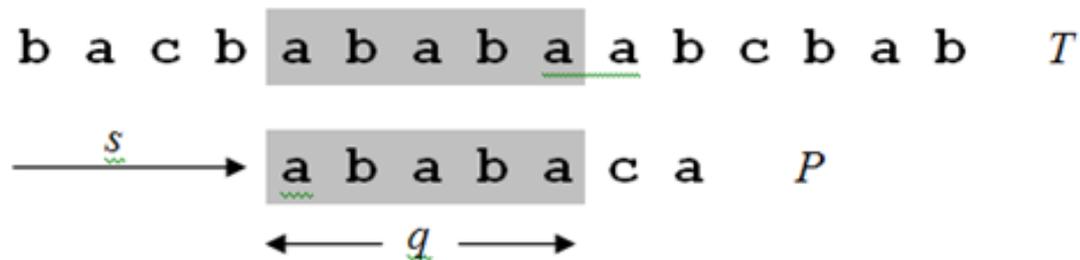
- ◇ Проверка совмещения двух строк: посимвольное сравнение слева направо, которое прекращается (с отрицательным результатом) при первом же расхождении.
- ◇ Оценка скорости сравнения строк x и y – $\Theta(t + 1)$, где t – длина наибольшего общего префикса строк x и y .

```
for (s = 0; s <= n - m; s++) {  
    for (i = 0; i < m && P[i] == T[s + i]; i++)  
        ;  
    if (i == m)  
        printf ("%d\n", s);  
}
```

- ◇ Время работы в худшем случае $\Theta((n - m + 1) \cdot m) \sim \Theta(nm)$.
Причина: информация о тексте T , полученная при проверке данного сдвига s , никак не используется при проверке следующих сдвигов. Например, если для образца **dddc** сдвиг $s = 0$ допустим, то сдвиги $s = 1, 2, 3$, недопустимы, так как **T[3] == c**.

Алгоритм Кнута – Морриса – Пратта. Идея

- ◆ Префикс-функция, ассоциированная с образцом P , показывает, где в строке P повторно встречаются различные префиксы этой строки. Если это известно, можно не проверять заведомо недопустимые сдвиги.
- ◆ **Пример.** Пусть ищутся вхождения образца $P = \mathbf{a b a b a c a}$ в текст T . Пусть для некоторого сдвига s оказалось, что первые q символов образца совпадают с символами текста. Значит, символы текста от $T[s+1]$ до $T[s+q]$ известны, что позволяет заключить, что некоторые сдвиги заведомо недопустимы.



Алгоритм Кнута – Морриса – Пратта. Идея

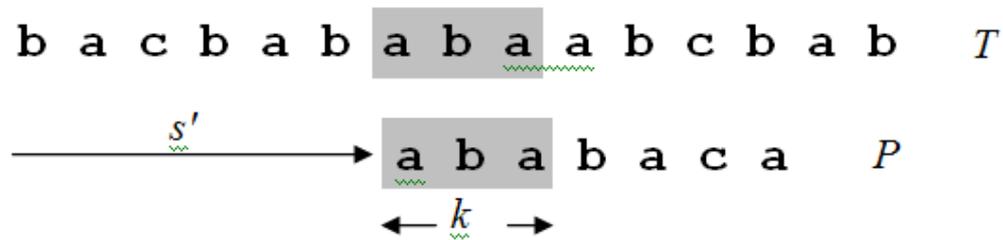
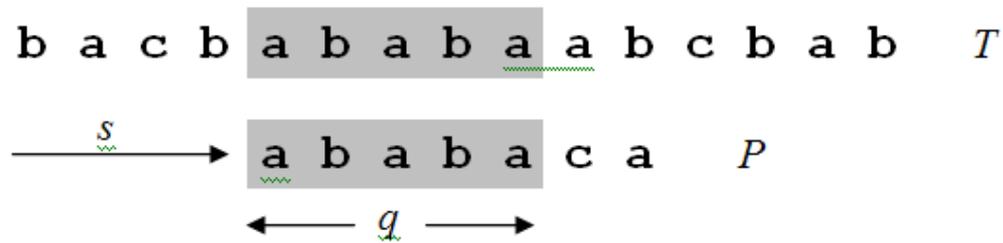
- ◇ Пусть $P[1..q] = T[s+1..s+q]$; каково минимальное значение сдвига $s' > s$, для которого $P[1..k] = T[s'+1..s'+k]$, где $s'+k = s+q$?
 - ◆ Число s' - минимальное значение сдвига, большего s , которое совместимо с тем, что $T[s+1..s+q] = P[1..q]$. Следовательно, значения сдвигов, меньшие s' , проверять не нужно. Лучше всего, когда $s' = s+q$, так как в этом случае не нужно рассматривать сдвиги $s+q-1, s+q-2, \dots, s+1$. Кроме того, при проверке нового сдвига s' можно не рассматривать первые его k символов образца: они заведомо совпадут.
- ◇ Чтобы найти s' , достаточно знать образец P и число q : $T[s'+1..s'+k]$ – суффикс P_q , поэтому k – это наибольшее число, для которого P_k является суффиксом P_q . Зная k (число символов, заведомо совпадающих при проверке нового сдвига s'), можно вычислить s' по формуле $s' = s + (q - k)$.

Алгоритм Кнута – Морриса – Пратта. Префикс-функция

♦ **Определение.** Префикс-функцией, ассоциированной со строкой $P[1..m]$, называется функция $\pi: \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{0, 1, \dots, m-1\}$, определенная следующим образом:

$$\pi[q] = \max\{k: k < q \ \& \ P_k \succcurlyeq P_q\}$$

Иными словами, $\pi[q]$ – длина наибольшего префикса P , являющегося суффиксом P_q .



$a \ b \ a \ b \ a \quad P_q$

$a \ b \ a \quad P_k$

Алгоритм Кнута – Морриса – Пратта. Префикс-функция

```
void prefix_func (char *pat, int *pi, int m) {
    int k, q;

    /* Считаем, что pat и pi нумеруются от 1 */
    pi[1] = 0; k = 0;
    for (q = 2; q <= m; q++) {
        while (k > 0 && pat[k + 1] != pat[q])
            k = pi[k];
        if (pat[k + 1] == pat[q])
            k++;
        pi[q] = k;
    }
}
```

Алгоритм Кнута – Морриса – Пратта. Префикс-функция

◇ **Лемма 1.** Обозначим $\pi^*[q] = \{q, \pi[q], \pi^2[q], \dots, \pi^t[q]\}$, где $\pi^i[q]$ есть i -я итерация префикс-функции, $\pi^t[q] = 0$. Пусть P – строка длины m с префикс-функцией π . Тогда для всех $q = 1, 2, \dots, m$ имеем $\pi^*[q] = \{k : P_k \succ P_q\}$.

◇ Лемма показывает, что при помощи итерирования префикс-функции можно для данного q найти все такие k , что P_k является суффиксом P_q .

◇ Доказательство.

(1) Покажем, что если i принадлежит $\pi^*[q]$, то P_i является суффиксом P_q .

Действительно, $P_{\pi[i]} \succ P_i$ по определению префикс-функции, так что каждый следующий член последовательности $P_i, P_{\pi[i]}, P_{\pi[\pi[i]]}, \dots$ является суффиксом всех предыдущих.

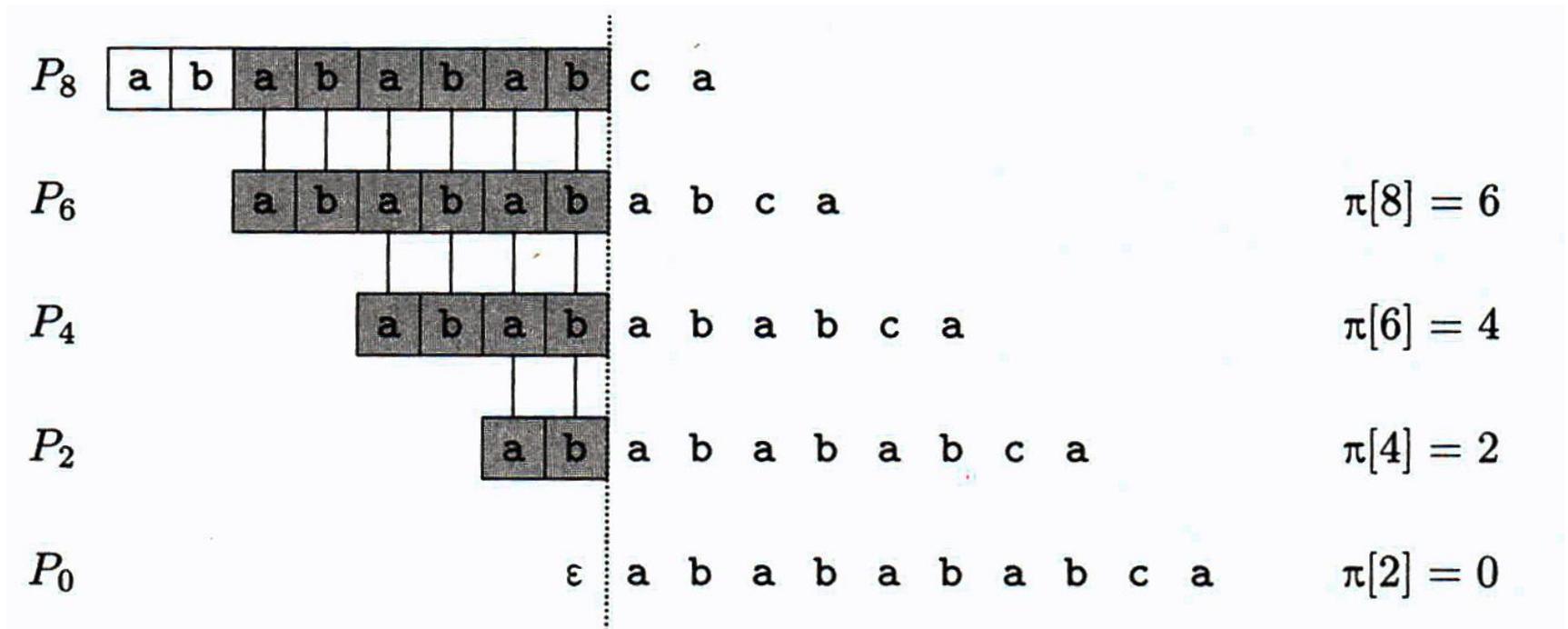
Алгоритм Кнута – Морриса – Пратта. Префикс-функция

◇ Доказательство.

- (2) Покажем, что наоборот, если P_i является суффиксом P_q , то i принадлежит $\pi^*[q]$.
- ◇ Расположим все P_i , являющиеся суффиксами P_q , в порядке уменьшения i (длины): P_{i_1}, P_{i_2}, \dots
 - ◇ Покажем по индукции, что $P_{i_k} = \pi^k[q]$.
 - ◇ База индукции ($k=1$): для максимального префикса P_i , являющегося суффиксом P_q , по определению $i = \pi[q]$.
 - ◇ Шаг индукции: если $P_{i_k} = \pi^k[q]$, то по определению $j = \pi[\pi^k[q]]$ соответствует максимальный префикс P_j , который является суффиксом P_{i_k} . Обе строки P_j и P_{i_k} есть суффиксы P_q по построению. Таким максимальным префиксом из оставшихся $P_{i_{k+1}}, P_{i_{k+2}}, \dots$ по построению является префикс $P_{i_{k+1}}$, то есть $j = i_{k+1}$.
 - ◇ (2) можно доказать и от противного: для наибольшего числа j такого, что $P_j \succ P_q$, но j не входит в $\pi^*[q]$, определение префикс-функции нарушается.

Алгоритм Кнута – Морриса – Пратта. Префикс-функция

$P[i]$	a	b	a	b	a	b	a	b	c	a
$\pi[i]$	0	0	1	2	3	4	5	6	0	1



$$\pi^*[8] = \{8, 6, 4, 2, 0\}$$

Алгоритм Кнута – Морриса – Пратта. Префикс-функция

◇ **Лемма 2.** Пусть P – строка длины m с префикс-функцией π . Тогда для всех $q = 1, 2, \dots, m$, для которых $\pi[q] > 0$, имеем $\pi[q] - 1 \in \pi^*[q - 1]$.

◇ Доказательство.

◆ Если $k = \pi[q] > 0$, то P_k является суффиксом P_q по определению префикс-функции.

◆ Следовательно, P_{k-1} является суффиксом P_{q-1} .

◆ Тогда по Лемме 1 $k - 1 \in \pi^*[q - 1]$, т.е.

$$\pi[q] - 1 \in \pi^*[q - 1].$$

◇ Определим множества E_{q-1} как

$$E_{q-1} = \{k : k \in \pi^*[q - 1] \text{ и } P[k + 1] = P[q]\}.$$

Множество E_{q-1} состоит из таких k , что P_k является суффиксом P_{q-1} , и за ними идут одинаковые буквы $P[k+1]$ и $P[q]$.

Из определения вытекает, что P_{k+1} есть суффикс P_q .

Алгоритм Кнута – Морриса – Пратта. Префикс-функция

- ◇ **Следствие 1.** Пусть P – строка длины m с префикс-функцией π . Тогда для всех $q = 2, 3, \dots, m$

$$\pi[q] = \begin{cases} 0, & \text{если } E_{q-1} \text{ пусто;} \\ 1 + \max\{k \in E_{q-1}\}, & \text{если } E_{q-1} \text{ не пусто.} \end{cases}$$

- ◇ Доказательство.

- ◆ Если $r = \pi[q] \geq 1$, то $P[r] = P[q]$ и по Лемме 2 $r - 1 = \pi[q] - 1 \in \pi^*[q - 1]$.
- ◆ Т.к. $P[r] = P[q]$, то $P[(r-1)+1] = P[q]$.
- ◆ Поэтому $r - 1 \in E_{q-1}$ по определению E_{q-1} и из $\pi[q] \geq 1$ следует непустота E_{q-1} .
- ◆ Следовательно, если E_{q-1} пусто, то $\pi[q] = 0$ (от противного).
- ◆ Если $k \in E_{q-1}$, то P_{k+1} есть суффикс P_q (из определения), следовательно, $\pi[q] \geq k + 1$ и $\pi[q] \geq 1 + \max\{k \in E_{q-1}\}$.
- ◆ То есть, если E_{q-1} не пусто, то префикс-функция положительна. Но тогда $\pi[q] - 1 \in E_{q-1}$, $\pi[q] - 1$ не больше максимума из E_{q-1} , т.е. $\pi[q] \leq 1 + \max\{k \in E_{q-1}\}$.

Алгоритм Кнута – Морриса – Пратта. Префикс-функция

```
1 void prefix_func (char *pat, int *pi, int m) {
2     int k, q;
3
4     /* Считаем, что pat и pi нумеруются от 1 */
5     pi[1] = 0; k = 0;
6     for (q = 2; q <= m; q++) {
7         while (k > 0 && pat[k + 1] != pat[q])
8             k = pi[k];
9         if (pat[k + 1] == pat[q])
10            k++;
11        pi[q] = k;
12    }
13 }
```

Алгоритм Кнута – Морриса – Пратта. Префикс-функция

◆ **Теорема 1.** Функция `prefix_func` правильно вычисляет префикс-функцию π .

◆ Доказательство.

◆ Покажем, что при входе в цикл функции $k = \pi[q-1]$.

◆ База индукции.

При $q = 2$ $k = 0$, $\pi[q-1] = \pi[1] = 0$.

◆ Шаг индукции.

Пусть при входе в цикл функции $k = \pi[q-1]$.

Код на строках 7-8

```
while (k > 0 && pat[k + 1] != pat[q])  
    k = pi[k];
```

находит наибольший элемент E_{q-1} (т.к. цикл перебирает в порядке убывания элементы из $\pi^*[q-1]$ и для каждого проверяет равенство `pat[k + 1] != pat[q]`)).

Дома. Попробуйте переписать простой алгоритм поиска (слайд 6) с использованием префикс-функции (слайды 8, 16).

Алгоритм Кнута – Морриса – Пратта. Префикс-функция

◆ **Теорема 1.** Функция `prefix_func` правильно вычисляет префикс-функцию π .

◆ Доказательство.

◆ После выхода из цикла на строках 7-8

```
while (k > 0 && pat[k + 1] != pat[q])  
    k = pi[k];
```

1) если `pat[k + 1] == pat[q]`, то выполняется код на строке 10:

```
k++;
```

что из Следствия 1 дает нам $\pi[q]$.

2) если `pat[k + 1] != pat[q]`, то `k == 0`, множество E_{q-1} пусто и $\pi[q] = 0$.

Алгоритм Кнута – Морриса – Пратта. Функция kmp

```
void kmp (char *text, char *pat, int m, int n) {
    int q;
    int pi[m + 1]; /* VLA-массив */
    /* Через alloca: int *pi = alloca ((m + 1) * sizeof (int)); */
    /* Считаем, что pat и text нумеруются от 1 */
    prefix_func (pat, pi, m);
    q = 0;
    for (i = 1; i <= n; i++) {
        while (q > 0 && pat[q + 1] != text[i])
            q = pi[q];
        if (pat[q + 1] == text[i])
            q++;
        if (q == m) {
            printf ("образец входит со сдвигом %d\n", i - m);
            q = pi[q];
        }
    }
}
```

Алгоритм Кнута – Морриса – Пратта. Функция `kmp`

- ◇ Алгоритм КМП для подстроки P и текста T эквивалентен вычислению префикс-функции для строки $Q = P\#T$, где $\#$ – символ, заведомо не встречающийся в обеих строках
 - ◆ Длина максимального префикса Q , являющегося её суффиксом (т.е. значение префикс-функции), не превосходит длины P
 - ◆ Допустимый сдвиг обнаруживается в тот момент, когда очередное вычисленное значение префикс-функции совпадает с длиной подстроки P (условие `if (q == m)`)
 - ◆ В явном виде объединенная строка не строится!
- ◇ **Теорема 2.** Функция `kmp` работает правильно.
 - ◆ Формальное доказательство осуществляется по аналогии с доказательством Теоремы 1, где множества, подобные E_{q-1} , строятся для строки-текста, а не строки-образца.
- ◇ Свойства префикс-функции часто используются и в других задачах (кроме поиска подстроки в строке)
 - ◆ Полезной оказывается Лемма 1: итерированием префикс-функции можно найти все префиксы строки, ²⁰ являющиеся ее суффиксами

Алгоритм Кнута – Морриса – Пратта. Время работы

- ◆ Функция **prefix_func** выполняет $\leq (m - 1)$ итераций цикла **for**. Стоимость каждой итерации можно считать равной $O(1)$, а стоимость всей процедуры $O(m)$.
 - ◆ Каждая итерация цикла **while** (строки 7-8) уменьшает **k**
 - ◆ Увеличивается **k** только в строке 10 не более одного раза на итерацию цикла **for** (строки 6-11)
 - ◆ Следовательно, операций уменьшения не больше, чем итераций цикла **for**, то есть $\leq (m - 1)$ на весь цикл и $O(1)$ на итерацию в среднем
- ◆ Аналогично, функция **kmp** выполняет $\leq (n - 1)$ итераций, и ее стоимость (без учета вызова **prefix_func**) есть $O(n)$. Следовательно, время выполнения всей процедуры $O(m + n)$.