

**Курс «Алгоритмы и алгоритмические языки»
1 семестр 2015/2016**

Лекция 2

Машина Тьюринга (МТ)

Алфавит состояний $Q = \{q_0, q_1, q_2, \dots, q_n\}$

Рабочий алфавит $S = A \cup A'$:

A – алфавит входных символов,

A' – алфавит вспомогательных символов (маркеров).

Лента, размеченная на ячейки (пустая ячейка - Λ)

Управляющая головка (УГ)

Рабочая ячейка (РЯ)

Начальное состояние q_0 , состояние останова q_s .

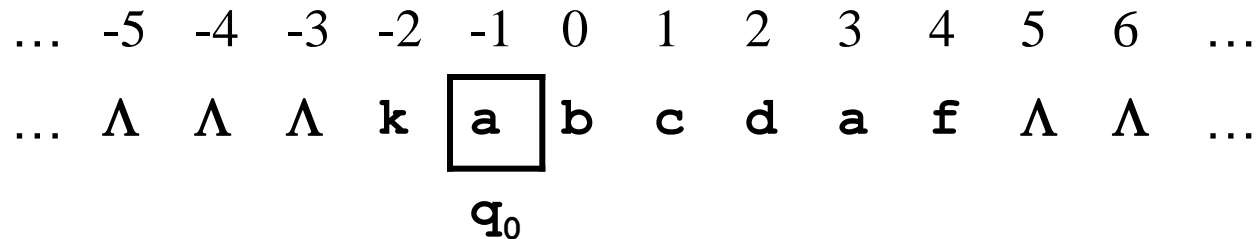
Начальные данные – слова из A^* .

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Перестройка МТ к виду, более удобному для ДТ

(1) МТ с лентой, ограниченной с левого конца

Для произвольной МТ T с неограниченной лентой построим МТ T' с лентой, ограниченной с левого конца, которая работает так же



- (а) перегнем ленту по ячейке с номером 0;
- (б) раздвинем ячейки правой части ленты, помещая содержимое ячейки с номером n в ячейку с номером $2 \cdot n$
- (в) в освободившиеся ячейки с нечетными номерами поместим содержимое ячеек левой части ленты, помещая содержимое ячейки с номером n в ячейку с номером $2 \cdot \lfloor n/2 \rfloor - 1$

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Перестройка МТ к виду, более удобному для ДТ

(1) МТ с лентой, ограниченной с левого конца

- (а) перегнем ленту по ячейке с номером 0;
- (б) раздвинем ячейки правой части ленты (с неотрицательными номерами), помещая содержимое ячейки с номером n в ячейку с номером $2 \cdot n$
- (в) в освободившиеся ячейки с нечетными номерами поместим содержимое ячеек левой части ленты (с отрицательными номерами), помещая содержимое ячейки с номером n в ячейку с номером $2 \cdot |n| - 1$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	
0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	5	-6	6	...	
	b	a	c	k	d	Λ	a	Λ	f	Λ	Λ	Λ	Λ	...
		q ₀												

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Перестройка МТ к виду, более удобному для ДТ

(1) МТ с лентой, ограниченной с левого конца



T	T' (четные)	T' (нечетные)	T' (ячейка 0)	T' (ячейка 1)
вправо	на две вправо	на две влево	на две вправо	на одну влево
влево	на две влево	на две вправо	на одну вправо	на две вправо

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Перестройка МТ к виду, более удобному для ДТ

(2) МТ с укороченными инструкциями.

Рассмотрим произвольную инструкцию МТ \mathbf{T} :

$q, a \rightarrow q', b, R$;

Разобьем ее на две инструкции:

(1) $q, a \rightarrow q'', b, H$ (только записывает символ в РЯ);

(2) $q'', b \rightarrow q', b, R$ (только сдвигает головку).

Можно доказать, что для любой МТ \mathbf{T} можно построить МТ \mathbf{T}' , каждая инструкция которой либо только сдвигает головку, либо только записывает символ в РЯ.

МТ \mathbf{T}' и есть МТ с укороченными инструкциями.

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Перестройка МТ к виду, более удобному для ДТ

Далее будем рассматривать класс МТ, который содержит только МТ с укороченными инструкциями, лентой, ограниченной слева, выполняющие нормальные вычисления по Тьюрингу.

Все эти предположения не являются ограничением общности, так как по произвольной МТ нетрудно построить МТ рассматриваемого класса.

Основным преимуществом рассматриваемого класса МТ является возможность ввести понятие **действия**.

$$v_{ij} = \{L, R, H, s_i \in S\}$$

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Построение диаграмм Тьюринга

Запись символа в РЯ или сдвиг УГ вправо или влево называются **элементарными действиями**.

МТ, выполняющие элементарные действия

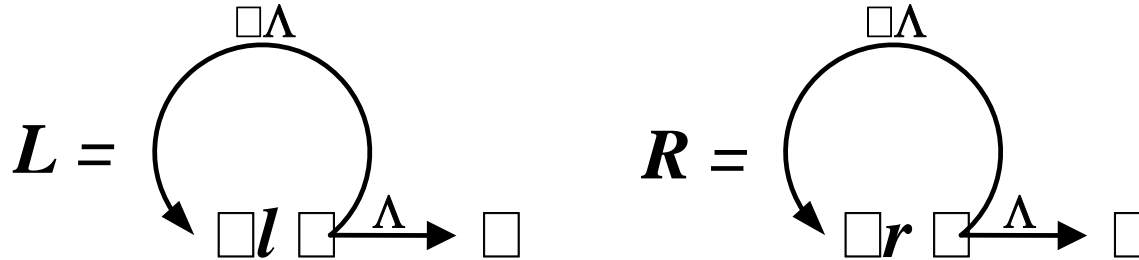
Элементарная МТ	Программа	Диаграмма
l	$q_0 \Lambda \rightarrow l q_1, q_0 a_1 \rightarrow l q_1, \dots, q_0 a_p \rightarrow l q_1,$ q_1 – состояние останова*	
r	$q_0 \Lambda \rightarrow r q_1, \dots, q_0 a_p \rightarrow r q_1,$ q_1 – состояние останова*	
a_i	$q_0 \Lambda \rightarrow a_i q_1, q_0 a_1 \rightarrow a_i q_1, \dots, q_0 a_p \rightarrow a_i q_1,$ q_1 – состояние останова*	

*Иногда пишут правила вида $q_1 a_i \rightarrow h q_s$

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Построение диаграмм Тьюринга

Примеры не элементарных МТ.



МТ L переводит конфигурацию

$$[\Lambda \Lambda \dots \Lambda a_1 a_2 a_3 \dots a_n \Lambda \Lambda \dots]_{q_0}$$

в конфигурацию

$$[\Lambda \Lambda \dots \Lambda a_1 a_2 a_3 \dots a_n \Lambda \Lambda \dots]_{q_1} \quad (1)$$

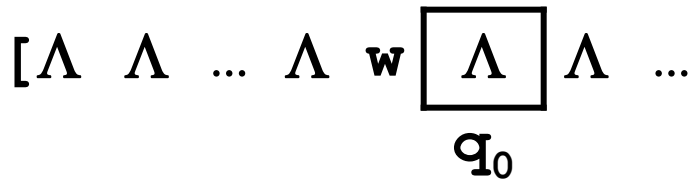
В дальнейшем слово на ленте $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ будем обозначать w , т.е. (1)

будем записывать в виде $[\Lambda \Lambda \dots \Lambda w \Lambda \Lambda \dots]_{q_1}$

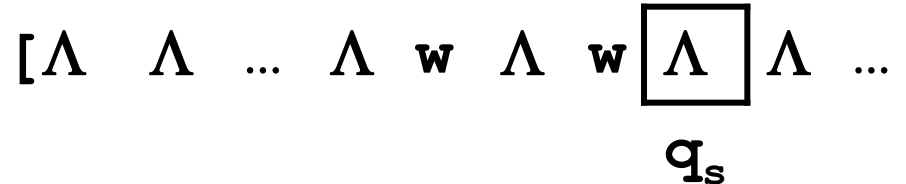
Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Построение диаграмм Тьюринга

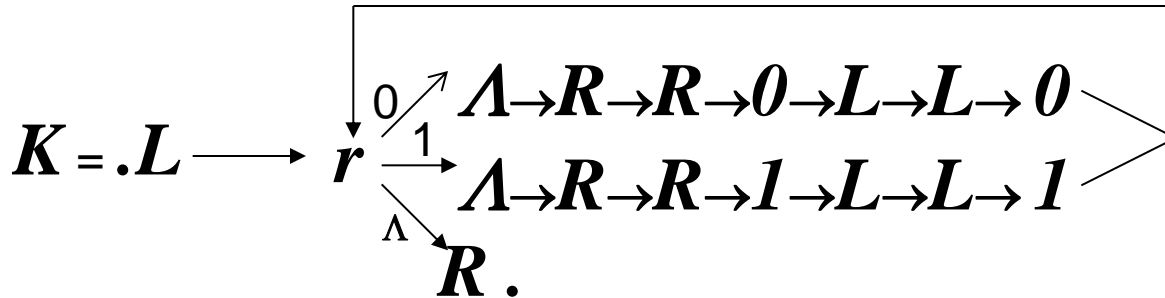
МТ K переводит конфигурацию :



в конфигурацию :

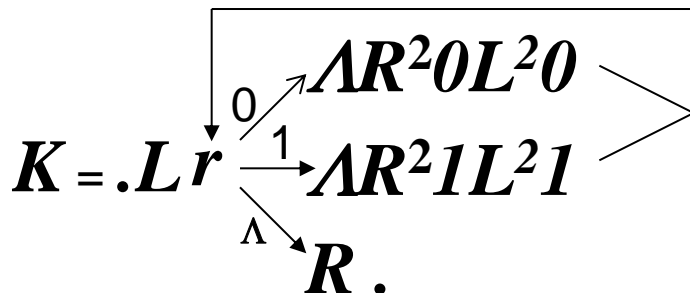


т.е. копирует слово \mathbf{w} . Диаграмма МТ K (над алфавитом $\{0,1\}$)



Соглашение: стрелочки, над которыми ничего не надписано, опускаются.

Получаем упрощенную диаграмму:



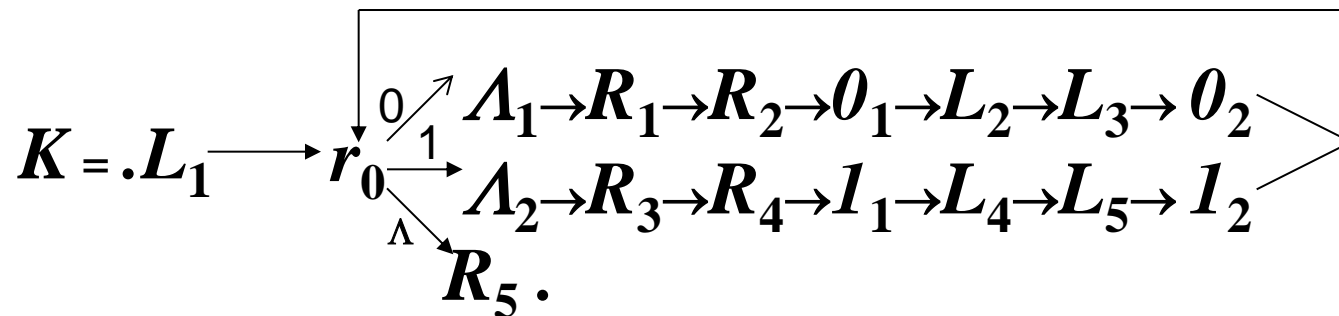
Левая точка соответствует состоянию q_0 ,
правая – состоянию q_s

В дальнейшем при построении новых МТ
можно использовать диаграмму МТ K ¹²

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Построение таблиц по диаграммам

- (1) Заменяем упрощенную диаграмму полной
- (2) С помощью индексации добиваемся, чтобы каждый символ МТ входил в диаграмму только один раз.



- (3) Сопоставим каждому символу МТ ее таблицу. Например, МТ r_0 сопоставим таблицу: $q_{00}\Lambda \rightarrow r_0 q_{01}$; $q_{00}0 \rightarrow r_0 q_{01}$; $q_{00}1 \rightarrow r_0 q_{01}$;
 $q_{01}\Lambda \rightarrow h_0 q_{0s}$; $q_{01}0 \rightarrow h_0 q_{0s}$; $q_{01}1 \rightarrow h_0 q_{0s}$;
- (4) Перепишем все таблицы одну за другой (в любой последовательности)

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Построение таблиц по диаграммам

Замечание. Диаграмма каждой МТ начинается и заканчивается точкой (начальное состояние и состояние останова). При композиции диаграмм конечная точка диаграммы сливается с начальной точкой следующей диаграммы и тем самым исключается. Следовательно, у каждой диаграммы остается только одна точка (начальная).

(5) Добавим в таблицу следующие строки:

(а) для каждого символа A , которому соответствует стрелка, ведущая из точки снова к ней же, добавим строку $q_0A \rightarrow Aq_0$

(б) для каждого символа A , которому соответствует стрелка, ведущая из точки к символу M , добавим строку $q_0A \rightarrow Aq_{M0}$

(в) для каждого символа A , которому не соответствует никакая стрелка, ведущая из точки, добавим строку $q_0A \rightarrow hq_s$

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Построение таблиц по диаграммам

- (5) (г) если два символа M и M' соединены стрелкой, над которой надписан символ a , то всякую строку $qa \rightarrow hq'$ для состояния останова q из части таблицы, соответствующей M , заменяем строкой $qa \rightarrow aq_{M'0}$ (аналогично для стрелки в состояние останова)

В результате преобразований (1) – (5) получится таблица МТ, которая выполняет те же действия, что и МТ, заданная диаграммой.

Поэтому МТ, задаваемые диаграммами, эквивалентны МТ, задаваемыми таблицами.

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Моделирование МТ

Определение. МТ M моделирует МТ M' , если выполнены следующие условия:

- (1) Данная начальная конфигурация вызывает машинный останов МТ M после конечного числа шагов тогда и только тогда, когда указанная начальная конфигурация вызывает машинный останов МТ M' после конечного числа шагов
- (2) Данная начальная конфигурация вызывает переход за край ленты у МТ M после конечного числа шагов тогда и только тогда, когда указанная начальная конфигурация вызывает переход за край ленты у МТ M' после конечного числа шагов
- (3) Последовательность текущих конфигураций МТ M' для данной начальной конфигурации является подпоследовательностью последовательности текущих конфигураций МТ M для той же начальной конфигурации