

**Курс «Алгоритмы и алгоритмические языки»
1 семестр 2018/2019**

Лекция 2

Машина Тьюринга (МТ)

Алфавит состояний $Q = \{q_0, q_1, q_2, \dots, q_n\}$

Рабочий алфавит $S = A \cup A'$:

A – алфавит входных символов,

A' – алфавит вспомогательных символов (маркеров).

Лента, размеченная на ячейки (пустая ячейка – Λ)

Управляющая головка (УГ)

Рабочая ячейка (РЯ)

Начальное состояние q_0 , состояние останова q_s .

Начальные данные – слова из A^* .

Машина Тьюринга (МТ)

... $\Lambda\Lambda\Lambda 00101110010$ 1 $11000000\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$...

q

Конфигурация МТ: $\langle n, F, q \rangle$, где $F: Z \rightarrow S$

Такт работы МТ:

$\langle \text{состояние, символ} \rangle \rightarrow \langle \text{состояние, символ, направление} \rangle$

Машина Тьюринга (МТ)

Пример. Проверка правильности скобочных выражений:

МТ должна записать на ленту для правильного скобочного выражения результат 1 (для неправильного 0) и остановиться.

Правильное скобочное выражение:

(1) число открывающих скобок равно числу закрывающих,

(2) каждая открывающая скобка предшествует парной ей закрывающей скобке.

(())() – правильное скобочное выражение

)(или (() – неправильные скобочные выражения

Машина Тьюринга (МТ)

Пример. Проверка правильности скобочных выражений:

МТ должна записать на ленту для правильного скобочного выражения результат 1 (для неправильного 0) и остановиться.

Рабочий алфавит: $S = \{ (,), 0, 1 \} \cup \{ \Lambda, X \}$ (X – маркер)

Алфавит состояний $Q = \{ q_0, q_1, q_2, q_3, q_s \}$:

q_0 – начальное состояние МТ: поиск закрывающей скобки;

q_s – состояние останова;

q_1 – поиск парной открывающей скобки;

q_2 – стирание маркеров, запись результата 1 и переход в q_s ;

q_3 – стирание маркеров, запись результата 0 и переход в q_s .

В начальном состоянии УГ обзревает самый левый символ входного слова

Машина Тьюринга (МТ)

Пример. Проверка правильности скобочных выражений:

МТ должна записать на ленту для правильного скобочного выражения результат 1 (для неправильного 0) и остановиться.

Программа

$q_0, (\rightarrow q_0, (, R;$ $q_0,) \rightarrow q_1, X, L;$ $q_0, X \rightarrow q_0, X, R;$ $q_0, \Lambda \rightarrow q_2, \Lambda, L;$

$q_1, (\rightarrow q_0, X, R;$ $q_1,) \rightarrow q_1,), L;$ $q_1, X \rightarrow q_1, X, L;$ $q_1, \Lambda \rightarrow q_3, \Lambda, R;$

$q_2, (\rightarrow q_3, \Lambda, H;$ $q_2,)$ невозможна; $q_2, X \rightarrow q_2, \Lambda, L;$ $q_2, \Lambda \rightarrow q_s, 1, H;$

$q_3, (\rightarrow q_3, \Lambda, L;$ $q_3,)$ невозможна; $q_3, X \rightarrow q_3, \Lambda, L;$ $q_3, \Lambda \rightarrow q_s, 0, H;$

Машина Тьюринга (МТ)

Пример. Проверка правильности скобочных выражений:

МТ должна записать на ленту для правильного скобочного выражения результат 1 (для неправильного 0) и остановиться.

На ленте не должно остаться ничего, кроме числа 1 или 0.

$q_0, (\rightarrow q_0, (, R;$ $q_0,) \rightarrow q_1, X, L;$ $q_0, X \rightarrow q_0, X, R;$ $q_0, \Lambda \rightarrow q_2, \Lambda, L;$

$q_1, (\rightarrow q_0, X, R;$ $q_1,) \rightarrow q_1,), L;$ $q_1, X \rightarrow q_1, X, L;$ $q_1, \Lambda \rightarrow q_3, \Lambda, R;$

$q_2, (\rightarrow q_3, \Lambda, L;$ $q_2,)$ невозможна; $q_2, X \rightarrow q_2, \Lambda, L;$ $q_2, \Lambda \rightarrow q_s, 1, H;$

$q_3, (\rightarrow q_3, \Lambda, R;$ $q_3,)$ невозможна?; $q_3, X \rightarrow q_3, \Lambda, R;$ $q_3, \Lambda \rightarrow q_s, 0, H;$

Машина Тьюринга (МТ)

Пример. Проверка правильности скобочных выражений:

МТ должна записать на ленту для правильного скобочного выражения результат 1 (для неправильного 0) и остановиться.

На ленте не должно остаться ничего, кроме числа 1 или 0.

Программа (другой способ записи)

$q_i \downarrow \setminus s_j \rightarrow$	()	X	Λ
q_0	$q_0, (, R$	q_1, X, L	q_0, X, R	q_2, Λ, L
q_1	q_0, X, R	$q_1,), L$	q_1, X, L	q_3, Λ, R
q_2	q_3, Λ, L	—	q_2, Λ, L	$q_s, 1, H$
q_3	q_3, Λ, R	—	q_3, Λ, R	$q_s, 0, H$

Дома: исправьте программу, чтобы лишние символы действительно стирались. Для каких слов в МТ на слайде этого не происходит?

Машина Тьюринга (МТ)

Нормальные МТ.

Любую МТ можно перестроить таким образом, что она будет, вычисляя ту же функцию, удовлетворять следующим двум условиям:

(1) в начальном состоянии (q_0) УГ установлена напротив пустой ячейки, которая следует за всеми исходными символами:

... Λ $(\)(\)((\))$ $\boxed{\Lambda}$ Λ...

q_0

(2) в состоянии останова (q_s) УГ установлена напротив пустой ячейки, которая следует за всеми символами результата:

... Λ 1 $\boxed{\Lambda}$ Λ...

q_s

МТ, удовлетворяющая условиям (1) и (2), называется *нормальной* МТ.

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Перестройка МТ к виду, более удобному для ДТ

(1) МТ с лентой, ограниченной с левого конца

Для произвольной МТ T с неограниченной лентой построим МТ T' с лентой, ограниченной с левого конца, которая работает так же

...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
...	Λ	Λ	Λ	к	а	б	с	д	а	ф	Λ	Λ	...
					q ₀								

- (а) перегнем ленту по ячейке с номером 0;
- (б) раздвинем ячейки правой части ленты, помещая содержимое ячейки с номером n в ячейку с номером $2 \cdot n$
- (в) в освободившиеся ячейки с нечетными номерами поместим содержимое ячеек левой части ленты, помещая содержимое ячейки с номером n в ячейку с номером $2 \cdot \lfloor n/2 \rfloor - 1$

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Перестройка МТ к виду, более удобному для ДТ

(1) МТ с лентой, ограниченной с левого конца

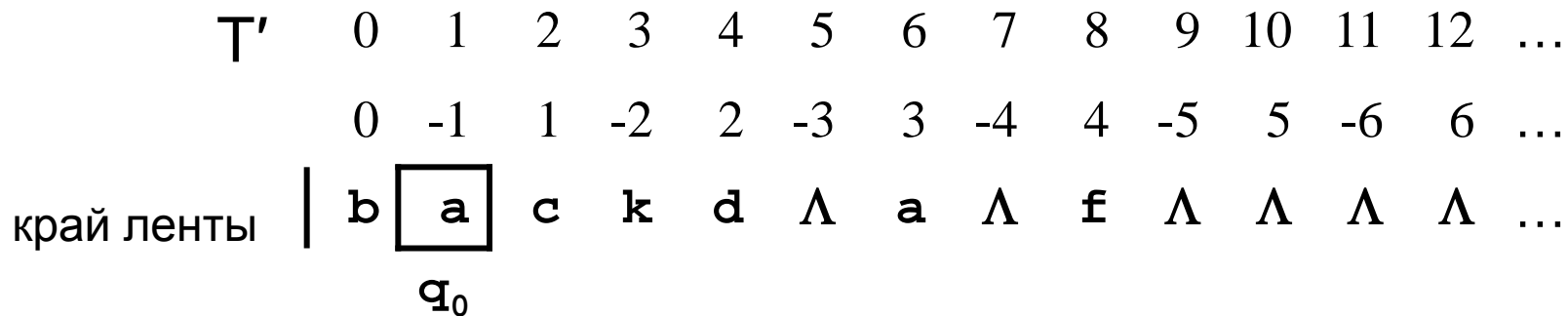
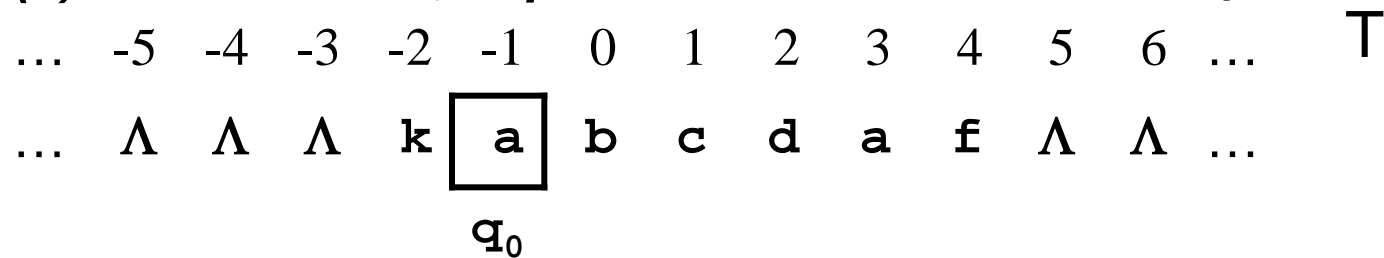
- (а) перегнем ленту по ячейке с номером 0;
- (б) раздвинем ячейки правой части ленты (с неотрицательными номерами), помещая содержимое ячейки с номером n в ячейку с номером $2 \cdot n$
- (в) в освободившиеся ячейки с нечетными номерами поместим содержимое ячеек левой части ленты (с отрицательными номерами), помещая содержимое ячейки с номером n в ячейку с номером $2 \cdot |n| - 1$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	
0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	5	-6	6	...	
	b	a	c	k	d	Λ	a	Λ	f	Λ	Λ	Λ	Λ	...
		q ₀												

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Перестройка МТ к виду, более удобному для ДТ

(1) МТ с лентой, ограниченной с левого конца

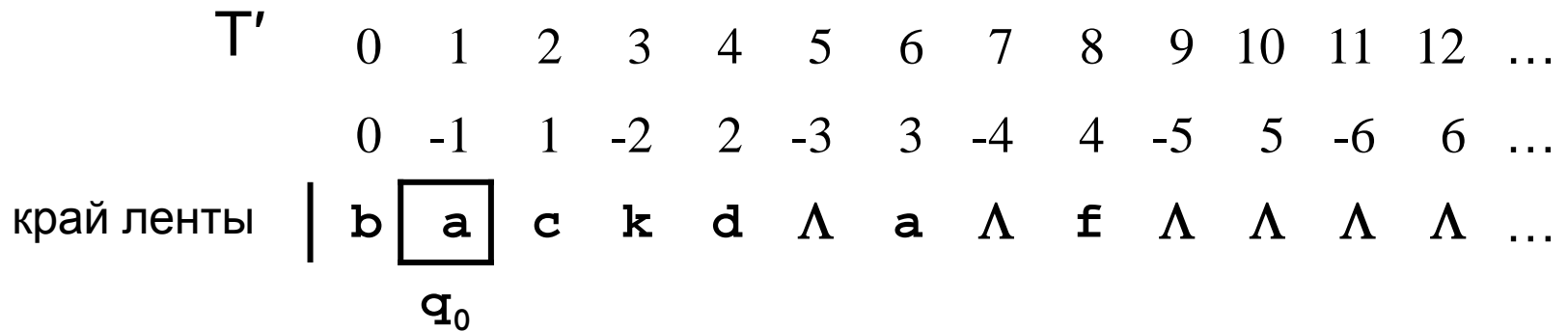


T	T' (четные)	T' (нечетные)	T' (ячейка 0)	T' (ячейка 1)
вправо	на две вправо	на две влево	на две вправо	на одну влево
влево	на две влево	на две вправо	на одну вправо	на две вправо

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Перестройка МТ к виду, более удобному для ДТ

(1) МТ с лентой, ограниченной с левого конца



Откуда известна четность ячейки? Как узнать, что МТ подошла к краю ленты?

«Размножение состояний» и специальный маркер в начале ленты.

T	T' (четные)	T' (нечетные)	T' (ячейка 0)	T' (ячейка 1)
вправо	на две вправо	на две влево	на две вправо	на одну влево
влево	на две влево	на две вправо	на одну вправо	на две вправо

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Перестройка МТ к виду, более удобному для ДТ

(2) МТ с укороченными инструкциями.

Рассмотрим произвольную инструкцию МТ **T**:

$q, a \rightarrow q', b, R$;

Разобьем ее на две инструкции:

(1) $q, a \rightarrow q'', b, H$ (только записывает символ в РЯ);

(2) $q'', b \rightarrow q', b, R$ (только сдвигает головку).

Можно доказать, что для любой МТ **T** можно построить МТ **T'**, каждая инструкция которой либо только сдвигает головку, либо только записывает символ в РЯ.

МТ **T'** и есть МТ с укороченными инструкциями.

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Перестройка МТ к виду, более удобному для ДТ

Далее будем рассматривать класс МТ, который содержит только МТ с укороченными инструкциями, лентой, ограниченной слева, выполняющие нормальные вычисления по Тьюрингу.

Все эти предположения не являются ограничением общности, так как по произвольной МТ нетрудно построить МТ рассматриваемого класса.

Основным преимуществом рассматриваемого класса МТ является возможность ввести понятие **действия**.

$$v_{ij} = \{L, R, H, s_i \in S\}$$

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Построение диаграмм Тьюринга

Запись символа в РЯ или сдвиг УГ вправо или влево называются **элементарными действиями**.

МТ, выполняющие элементарные действия

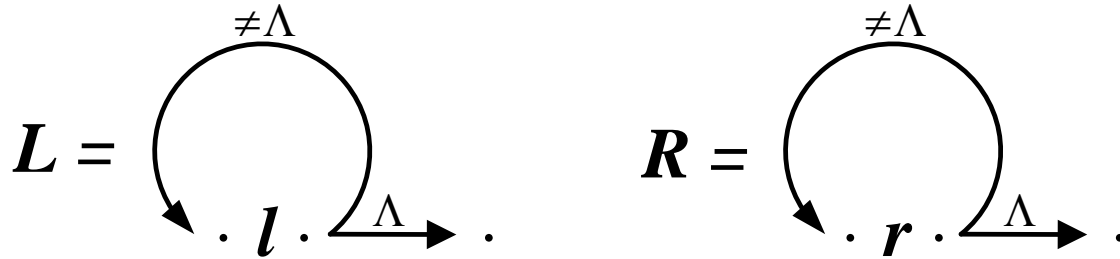
Элементарная МТ	Программа	Диаграмма
l	$q_0 \Lambda \rightarrow l q_1, q_0 a_1 \rightarrow l q_1, \dots, q_0 a_p \rightarrow l q_1,$ q_1 – состояние останова*	
r	$q_0 \Lambda \rightarrow r q_1, \dots, q_0 a_p \rightarrow r q_1,$ q_1 – состояние останова*	
a_i	$q_0 \Lambda \rightarrow a_i q_1, q_0 a_1 \rightarrow a_i q_1, \dots, q_0 a_p \rightarrow a_i q_1,$ q_1 – состояние останова*	

*Иногда пишут правила вида $q_1 a_i \rightarrow h q_s$

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Построение диаграмм Тьюринга

Примеры неэлементарных МТ.



МТ L переводит конфигурацию

$$[\Lambda \Lambda \dots \Lambda a_1 a_2 a_3 \dots a_n \boxed{\Lambda} \Lambda \dots]$$

q_0

в конфигурацию

$$[\Lambda \Lambda \dots \boxed{\Lambda} a_1 a_2 a_3 \dots a_n \Lambda \Lambda \dots] \quad (1)$$

q_1

В дальнейшем слово на ленте $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ будем обозначать w , т.е. (1)

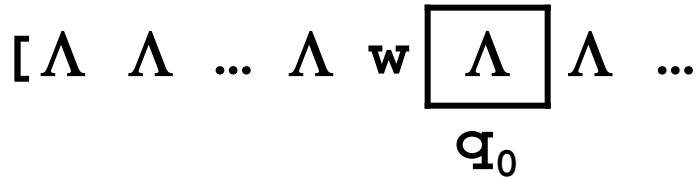
будем записывать в виде $[\Lambda \Lambda \dots \boxed{\Lambda} w \Lambda \Lambda \dots]$

q_1

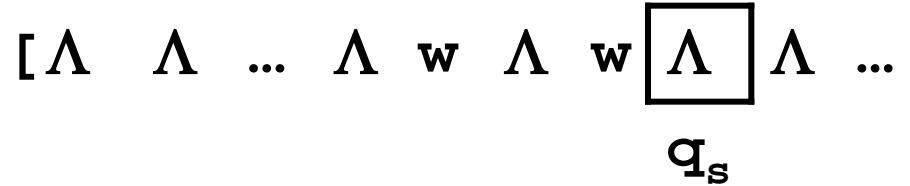
Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Построение диаграмм Тьюринга

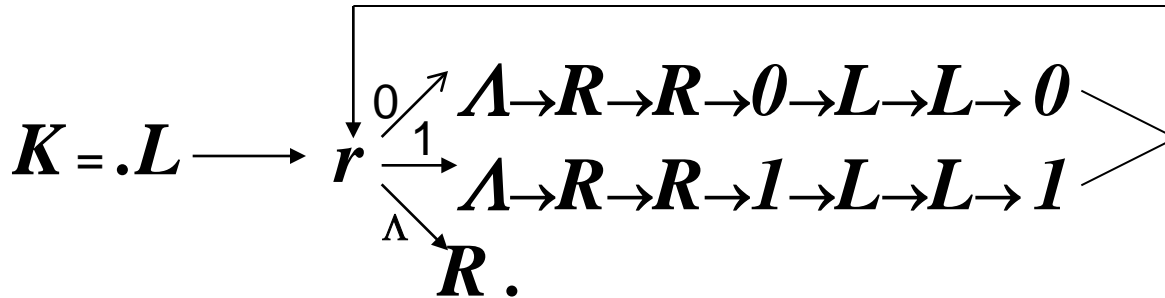
МТ K переводит конфигурацию :



в конфигурацию :

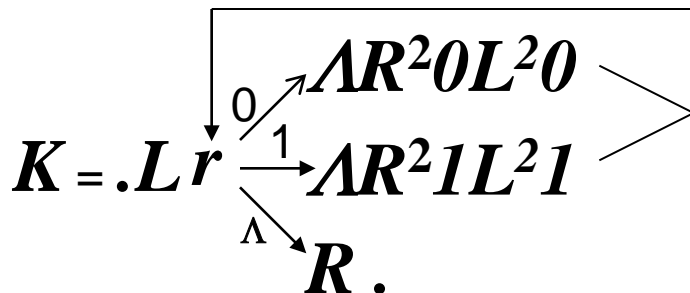


т.е. копирует слово w . Диаграмма МТ K (над алфавитом $\{0,1\}$)



Соглашение: стрелочки, над которыми ничего не надписано, опускаются.

Получаем упрощенную диаграмму:



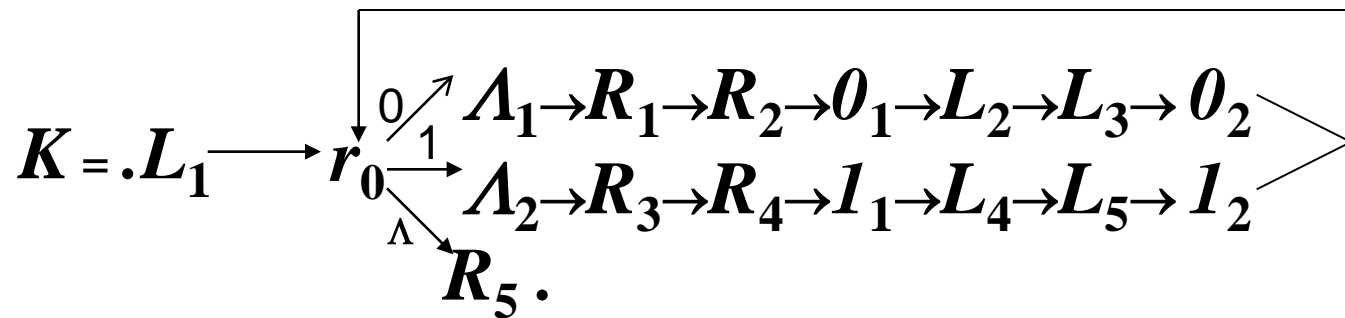
Левая точка соответствует состоянию q_0 ,
правая – состоянию q_s

В дальнейшем при построении новых МТ
можно использовать диаграмму МТ K ¹⁸

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Построение таблиц по диаграммам

- (1) Заменяем упрощенную диаграмму полной
- (2) С помощью индексации добиваемся, чтобы каждый символ МТ входил в диаграмму только один раз.



- (3) Сопоставим каждому символу МТ ее таблицу. Например, МТ r_0 сопоставим таблицу: $q_{00}\Lambda \rightarrow r q_{01}$; $q_{00}0 \rightarrow r q_{01}$; $q_{00}1 \rightarrow r q_{01}$;
 $q_{01}\Lambda \rightarrow h q_{0s}$; $q_{01}0 \rightarrow h q_{0s}$; $q_{01}1 \rightarrow h q_{0s}$;
- (4) Перепишем все таблицы одну за другой (в любой последовательности)

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Построение таблиц по диаграммам

Замечание. Диаграмма каждой МТ начинается и заканчивается точкой (начальное состояние и состояние останова). При композиции диаграмм конечная точка диаграммы сливается с начальной точкой следующей диаграммы и тем самым исключается. Следовательно, у каждой диаграммы остается только одна точка (начальная).

(5) Добавим в таблицу следующие строки:

(а) для каждого символа A , которому соответствует стрелка, ведущая из точки снова к ней же, добавим строку $q_0A \rightarrow Aq_0$

(б) для каждого символа A , которому соответствует стрелка, ведущая из точки к символу M , добавим строку $q_0A \rightarrow Aq_{M0}$

(в) для каждого символа A , которому не соответствует никакая стрелка, ведущая из точки, добавим строку $q_0A \rightarrow hq_s$

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Построение таблиц по диаграммам

- (5) (г) если два символа M и M' соединены стрелкой, над которой надписан символ a , то всякую строку $qa \rightarrow hq'$ для состояния останова q из части таблицы, соответствующей M , заменяем строкой $qa \rightarrow aq_{M'0}$ (аналогично для стрелки в состояние останова)

В результате преобразований (1) – (5) получится таблица МТ, которая выполняет те же действия, что и МТ, заданная диаграммой.

Поэтому МТ, задаваемые диаграммами, эквивалентны МТ, задаваемыми таблицами.