

**Курс «Алгоритмы и алгоритмические языки»
1 семестр 2016/2017**

Лекция 2

Машина Тьюринга (МТ)

Алфавит состояний $Q = \{q_0, q_1, q_2, \dots, q_n\}$

Рабочий алфавит $S = A \cup A'$:

A – алфавит входных символов,

A' – алфавит вспомогательных символов (маркеров).

Лента, размеченная на ячейки (пустая ячейка - Λ)

Управляющая головка (УГ)

Рабочая ячейка (РЯ)

Начальное состояние q_0 , состояние останова q_s .

Начальные данные – слова из A^* .

Конфигурация МТ: $\langle n, F, q \rangle$, где $F: Z \rightarrow S$

Такт работы МТ:

$\langle \text{состояние, символ} \rangle \rightarrow \langle \text{состояние, символ, направление} \rangle$

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Перестройка МТ к виду, более удобному для ДТ

(1) МТ с лентой, ограниченной с левого конца

Для произвольной МТ T с неограниченной лентой построим МТ T' с лентой, ограниченной с левого конца, которая работает так же

...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
...	Λ	Λ	Λ	к	а	б	с	д	а	ф	Λ	Λ	...
					q ₀								

- (а) перегнем ленту по ячейке с номером 0;
- (б) раздвинем ячейки правой части ленты, помещая содержимое ячейки с номером n в ячейку с номером $2 \cdot n$
- (в) в освободившиеся ячейки с нечетными номерами поместим содержимое ячеек левой части ленты, помещая содержимое ячейки с номером n в ячейку с номером $2 \cdot \lfloor n/2 \rfloor - 1$

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Перестройка МТ к виду, более удобному для ДТ

(1) МТ с лентой, ограниченной с левого конца

- (а) перегнем ленту по ячейке с номером 0;
- (б) раздвинем ячейки правой части ленты (с неотрицательными номерами), помещая содержимое ячейки с номером n в ячейку с номером $2 \cdot n$
- (в) в освободившиеся ячейки с нечетными номерами поместим содержимое ячеек левой части ленты (с отрицательными номерами), помещая содержимое ячейки с номером n в ячейку с номером $2 \cdot |n| - 1$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	
0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	5	-6	6	...	
	b	a	c	k	d	Λ	a	Λ	f	Λ	Λ	Λ	Λ	...
		q ₀												

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Перестройка МТ к виду, более удобному для ДТ

(1) МТ с лентой, ограниченной с левого конца



T	T' (четные)	T' (нечетные)	T' (ячейка 0)	T' (ячейка 1)
вправо	на две вправо	на две влево	на две вправо	на одну влево
влево	на две влево	на две вправо	на одну вправо	на две вправо

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Перестройка МТ к виду, более удобному для ДТ

(2) МТ с укороченными инструкциями.

Рассмотрим произвольную инструкцию МТ **T**:

$q, a \rightarrow q', b, R$;

Разобьем ее на две инструкции:

(1) $q, a \rightarrow q'', b, H$ (только записывает символ в РЯ);

(2) $q'', b \rightarrow q', b, R$ (только сдвигает головку).

Можно доказать, что для любой МТ **T** можно построить МТ **T'**, каждая инструкция которой либо только сдвигает головку, либо только записывает символ в РЯ.

МТ **T'** и есть МТ с укороченными инструкциями.

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Перестройка МТ к виду, более удобному для ДТ

Далее будем рассматривать класс МТ, который содержит только МТ с укороченными инструкциями, лентой, ограниченной слева, выполняющие нормальные вычисления по Тьюрингу.

Все эти предположения не являются ограничением общности, так как по произвольной МТ нетрудно построить МТ рассматриваемого класса.

Основным преимуществом рассматриваемого класса МТ является возможность ввести понятие **действия**.

$$v_{ij} = \{L, R, H, s_i \in S\}$$

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Построение диаграмм Тьюринга

Запись символа в РЯ или сдвиг УГ вправо или влево называются **элементарными действиями**.

МТ, выполняющие элементарные действия

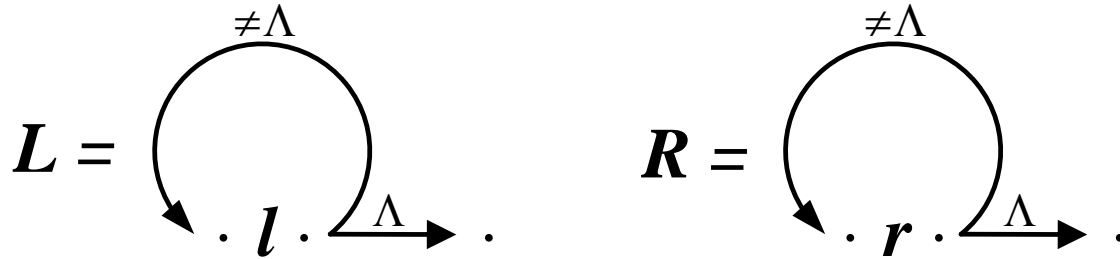
Элементарная МТ	Программа	Диаграмма
l	$q_0 \Lambda \rightarrow l q_1, q_0 a_1 \rightarrow l q_1, \dots, q_0 a_p \rightarrow l q_1,$ q_1 – состояние останова*	
r	$q_0 \Lambda \rightarrow r q_1, \dots, q_0 a_p \rightarrow r q_1,$ q_1 – состояние останова*	
a_i	$q_0 \Lambda \rightarrow a_i q_1, q_0 a_1 \rightarrow a_i q_1, \dots, q_0 a_p \rightarrow a_i q_1,$ q_1 – состояние останова*	

*Иногда пишут правила вида $q_1 a_i \rightarrow h q_s$

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Построение диаграмм Тьюринга

Примеры не элементарных МТ.



МТ L переводит конфигурацию

$$[\Lambda \Lambda \dots \Lambda a_1 a_2 a_3 \dots a_n \boxed{\Lambda} \Lambda \dots]$$

q_0

в конфигурацию

$$[\Lambda \Lambda \dots \boxed{\Lambda} a_1 a_2 a_3 \dots a_n \Lambda \Lambda \dots] \quad (1)$$

q_1

В дальнейшем слово на ленте $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ будем обозначать w , т.е. (1)

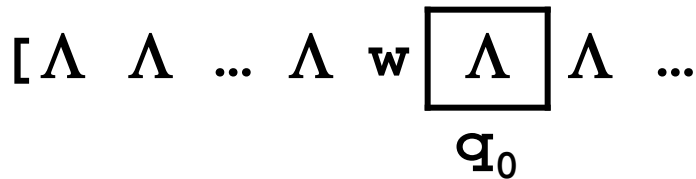
будем записывать в виде $[\Lambda \Lambda \dots \boxed{\Lambda} w \Lambda \Lambda \dots]$

q_1

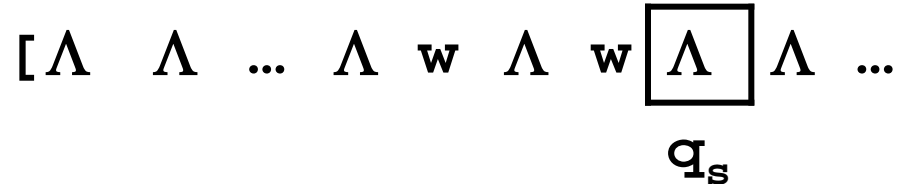
Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Построение диаграмм Тьюринга

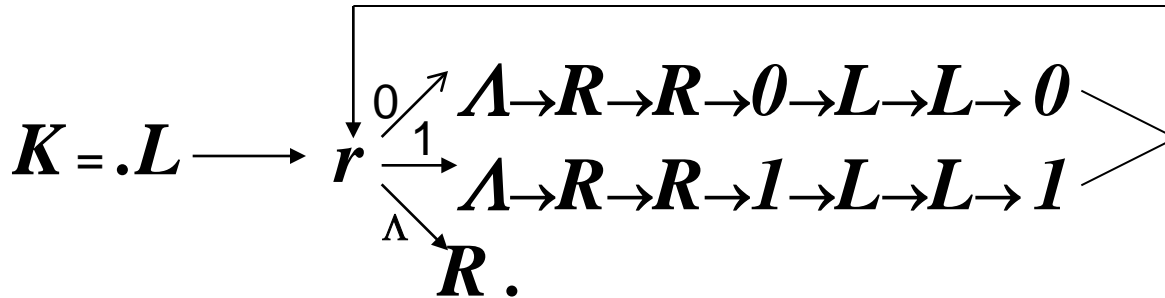
МТ K переводит конфигурацию :



в конфигурацию :

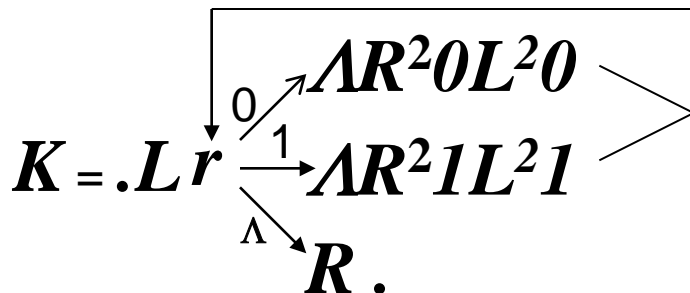


т.е. копирует слово w . Диаграмма МТ K (над алфавитом $\{0,1\}$)



Соглашение: стрелочки, над которыми ничего не надписано, опускаются.

Получаем упрощенную диаграмму:



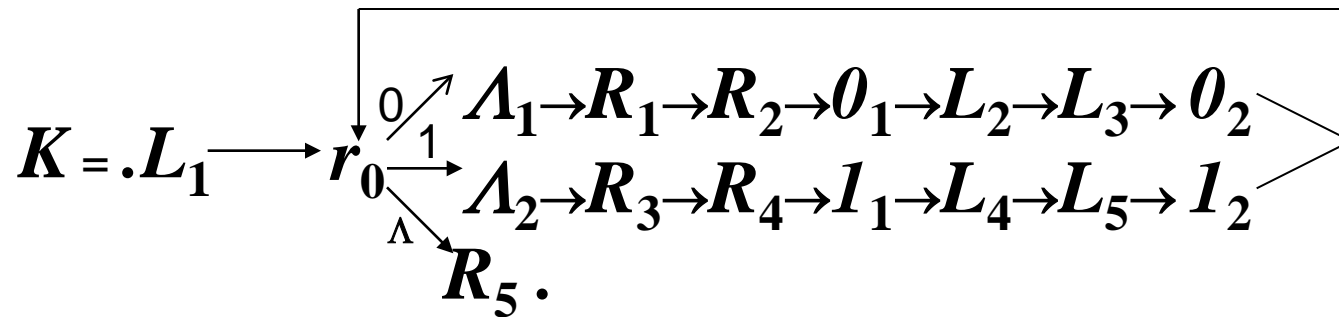
Левая точка соответствует состоянию q_0 ,
правая – состоянию q_s

В дальнейшем при построении новых МТ
можно использовать диаграмму МТ K ¹¹

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Построение таблиц по диаграммам

- (1) Заменяем упрощенную диаграмму полной
- (2) С помощью индексации добиваемся, чтобы каждый символ МТ входил в диаграмму только один раз.



- (3) Сопоставим каждому символу МТ ее таблицу. Например, МТ r_0 сопоставим таблицу: $q_{00}\Lambda \rightarrow r q_{01}$; $q_{00}0 \rightarrow r q_{01}$; $q_{00}1 \rightarrow r q_{01}$;
 $q_{01}\Lambda \rightarrow h q_{0s}$; $q_{01}0 \rightarrow h q_{0s}$; $q_{01}1 \rightarrow h q_{0s}$;
- (4) Перепишем все таблицы одну за другой (в любой последовательности)

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Построение таблиц по диаграммам

Замечание. Диаграмма каждой МТ начинается и заканчивается точкой (начальное состояние и состояние останова). При композиции диаграмм конечная точка диаграммы сливается с начальной точкой следующей диаграммы и тем самым исключается. Следовательно, у каждой диаграммы остается только одна точка (начальная).

(5) Добавим в таблицу следующие строки:

(а) для каждого символа A , которому соответствует стрелка, ведущая из точки снова к ней же, добавим строку $q_0A \rightarrow Aq_0$

(б) для каждого символа A , которому соответствует стрелка, ведущая из точки к символу M , добавим строку $q_0A \rightarrow Aq_{M0}$

(в) для каждого символа A , которому не соответствует никакая стрелка, ведущая из точки, добавим строку $q_0A \rightarrow hq_s$

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Построение таблиц по диаграммам

- (5) (г) если два символа M и M' соединены стрелкой, над которой надписан символ a , то всякую строку $qa \rightarrow hq'$ для состояния останова q из части таблицы, соответствующей M , заменяем строкой $qa \rightarrow aq_{M'0}$ (аналогично для стрелки в состояние останова)

В результате преобразований (1) – (5) получится таблица МТ, которая выполняет те же действия, что и МТ, заданная диаграммой.

Поэтому МТ, задаваемые диаграммами, эквивалентны МТ, задаваемыми таблицами.

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Моделирование МТ

Определение. МТ M моделирует МТ M' , если выполнены следующие условия:

- (1) Данная начальная конфигурация вызывает машинный останов МТ M после конечного числа шагов тогда и только тогда, когда указанная начальная конфигурация вызывает машинный останов МТ M' после конечного числа шагов
- (2) Данная начальная конфигурация вызывает переход за край ленты у МТ M после конечного числа шагов тогда и только тогда, когда указанная начальная конфигурация вызывает переход за край ленты у МТ M' после конечного числа шагов
- (3) Последовательность текущих конфигураций МТ M' для данной начальной конфигурации является подпоследовательностью последовательности текущих конфигураций МТ M для той же начальной конфигурации

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Универсальная машина Тьюринга

Определение. Универсальной машиной Тьюринга (УМТ) для алфавита A_p называется такая МТ U , на которой может быть промоделирована любая МТ над алфавитом A_p .

Замечание. На самом деле можно эффективно построить УМТ, моделирующую любую МТ над любым алфавитом. Для этого фиксируется некоторый алфавит (например $A_2 = \{0,1\}$) и добавляется кодирование и декодирование.

Идея УМТ. На ленту УМТ записывается программа моделируемой МТ (таблица) и исходные данные моделируемой МТ. УМТ по состоянию и текущему символу МТ находит на своей ленте команду моделируемой МТ, выясняет, какое действие нужно выполнить, и выполняет его.

Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Универсальная машина Тьюринга

Этапы построения УМТ.

(1) Как представить программу моделируемой МТ на ленте УМТ?

Рабочий алфавит A' УМТ является расширением алфавита A_p .

$$A' = A_p \cup \{b_1, b_2, \dots, b_p\} \cup \{b_0\} \cup \{r, l, h, +, -, O, c, \S, *\}$$

Программа: $cw_0cw_1\dots cw_s\S$, где w_i – слово-программа для q_i .

Правило $q_i a_j \rightarrow v_{ij} q_k$, слово-правило:
$$\begin{cases} b_j v_{ij} +^{k-i}, & \text{если } k > i \\ b_j v_{ij} O & \text{если } k = i \\ b_j v_{ij} -^{i-k}, & \text{если } k < i \end{cases}$$

(2) Как выглядит лента в исходном состоянии УМТ?

$[*w_0cw_1\dots cw_s\S w\Lambda\Lambda \dots$

q

w – исходные данные моделируемой МТ. Звездочка отмечает q_0 .

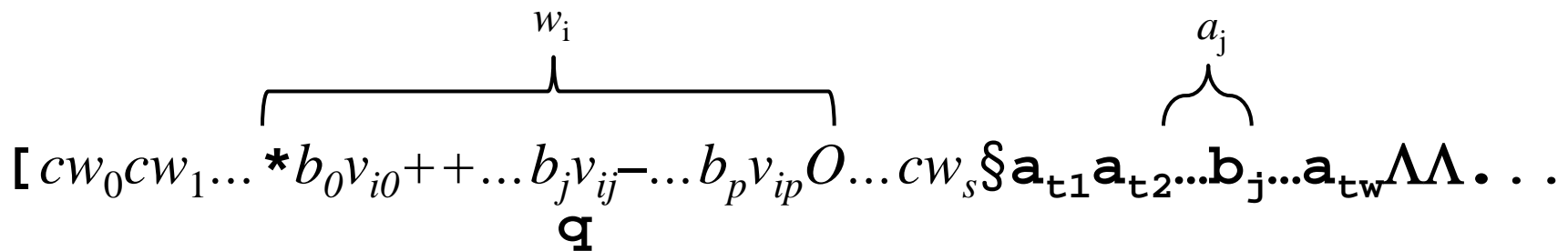
Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Универсальная машина Тьюринга

Этапы построения УМТ.

(3) Как происходит интерпретация моделируемой МТ?

- (а) УМТ “запоминает” (размножением состояний) обозреваемый в ячейке символ a_j из A_p и заменяет его на b_j .
- (б) УМТ ищет слово программы w_i , описывающее текущее состояние моделируемой МТ (отмечено звездочкой).
- (в) УМТ ищет символ b_j , соответствующий “запомненному” на шаге а) символу a_j , и сдвигается вправо через действие v_{ij} до описания сдвига на следующее состояние моделируемой МТ.



Диаграммы Тьюринга (ДТ)

Универсальная машина Тьюринга

Этапы построения УМТ.

(3) Как происходит интерпретация моделируемой МТ?

(г) УМТ передвигает символ обозначения текущего состояния моделируемой МТ (звездочку) по описанию сдвига на ее символ s и возвращается на описание действия v_{ij} .

(д) УМТ ищет записанный на шаге а) символ b_j из данных моделируемой МТ (после символа \S) и выполняет считанное действие (запись или сдвиг).

Замечание. Если при сдвиге УГ попала на символ \S , отделяющий программу моделируемой МТ от данных, это означает, что моделируемая МТ зашла за левый край ленты.

(е) Снова можно выполнять шаг а).

